4 Fourier-Transformation

4.1 Von der Fourier-Reihe zur Fourier-Transformation

Bislang wurden Funktionen f betrachtet, die aus reinen Wellen zusammengesetzt sind, wie die Sinus- oder die Cosinus-Funktion. Dabei traten wegen der gewählten Periode von 2π nur Argumente der Form $2\pi kx$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ auf. Die jeweiligen Anteile der reinen Wellen an Funktion f können durch die Fourier-Koeffizienten dargestellt werden. Was passiert aber, wenn f aus ganz verschiedenen Wellen zusammengesetzt ist, die untereinander nicht in diesem Sinne vergleichbar sind?

Um die Fourier-Reihe weiter zu verallgemeinern, müssen zunächst andere Perioden betrachtet werden. Bislang war die Fourier-Reihe für 2π-periodische Funktionen definiert, also für Funktionen, die wir z.B. auf $[-\pi, \pi]$ definiert und dann auf ganz $\mathbb{R}$ periodisch forgesetzt haben. Zunächst wird also ein allgemeineres Intervall $[-a, a]$ betrachtet, es soll also $f(x + 2a) = f(x)$ gelten. Aus Gl. (19) wird dann

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{c}_n \, e^{inx\frac{\pi}{a}} \quad \text{mit} \quad \tilde{c}_n = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{-inx\frac{\pi}{a}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

und es gilt wieder Konvergenz im L^2-Sinne, hier für alle Funktionen aus $L^2([-a, a], \mathbb{C})$. Durch Umschreiben einiger Terme erhält man neue Funktionen:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\Phi(n\tfrac{\pi}{a})}_{=\tilde{c}_n} e^{inx\frac{\pi}{a}} \quad \text{mit} \quad \Phi(n\tfrac{\pi}{a}) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{-inx\frac{\pi}{a}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Dies kann man nun folgendermaßen für eine Heuristik verwenden: Betrachtet man nun $a \to \infty$, wird aus $\Phi(n\frac{\pi}{a})$ fast eine kontinuierliche Funktion. Außerdem bleibt $\frac{1}{2a}f(x)$ bezüglich der Integration auf $[-a, a]$ etwa gleich groß. Die soll folgende Korrespondenz motivieren:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2a}f(x) &\curvearrowright g(x), \quad \text{mit } g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \\ \Phi(n\tfrac{\pi}{a}) &\curvearrowright h(y), \end{aligned}$$

und man betrachtet

$$h(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iyx} h(y)\,\mathrm{d}y. \tag{25}$$

Proposition 4.1. *Ist $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \widehat{=} L^1(\mathbb{R})$, so existiert die Abbildung h für alle $y \in \mathbb{R}$ und ist stetig. Dabei gilt:*

$$\|h\|_\infty = \sup_{y\in\mathbb{R}} |h(y)| \le \|g\|_1 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Außerdem gilt $\lim_{|y|\to\infty} h(y) = 0$.

Beweis. Für die erste Behauptung machen wir eine kleine Rechnung:

$$\|h\|_\infty \;=\; \sup_y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\left|\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}\, g(x)\,\mathrm{d}x\right|}_{\le \int_{\mathbb{R}} \underbrace{|e^{-ixy}|}_{=1}\,|g(x)|\,\mathrm{d}x} \;\le\; \|g\|_1\,.$$

Für den Beweis der zweiten Behauptung, die auch als *Riemann–Lebesgue-Lemma* bekannt ist, verweisen wir auf [5] oder [7]. □

4.2 Fourier-Transformation

Nun wollen wir obige Heuristik präzise fassen. Wir tun dies gleich im $\mathbb{R}^n$, wobei $tx = \sum_i t_i x_i$ das Skalarprodukt zweier Vektoren bezeichnen soll.

Definition 4.2. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, also $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,\mathrm{d}^n x < \infty$. Dann heißt

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-itx} f(x)\,\mathrm{d}^n x$$

die *Fourier-Transformation* von f.

Zu beachten ist, dass diese Definition nicht einheitlich so verwendet wird. Es gibt verschiedene Anwendungen aus Mechanik, Mathematik etc. in denen der Vorfaktor vor dem Integral und der Faktor im Exponenten aus praktischen Erwägungen anders gewählt werden. Für unsere Formulierung gilt folgendes Resultat.

Satz 4.3. *Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so existiert die Fourier-Transformierte $\widehat{f}$ gemäß Definition* 4.2. *Für beliebige $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{R}^n$ gelten dann die folgenden Eigenschaften:*

1. $g(x) \;=\; f(x)\, e^{i\alpha x} \quad\Rightarrow\quad \widehat{g}(t) \;=\; \widehat{f}(t-\alpha)$
2. $g(x) \;=\; f(x-\alpha) \quad\Rightarrow\quad \widehat{g}(t) \;=\; e^{-i\alpha t}\widehat{f}(t)$
3. *Ist $h = f * g$, so gilt der* Faltungssatz, *also $\widehat{h} = \widehat{f * g} = \widehat{f}\cdot\widehat{g}$, wobei die Faltung hier durch*

$$(f * g)(t) \;:=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau)\, g(t-\tau)\,\mathrm{d}^n\tau$$

definiert ist.

Beweis. Die Existenzaussage ist eine Folgerung von Proposition 4.1, die sich unmittelbar auf den n-dimensionalen Fall erweitert.

Für die erste Eigenschaft machen wir eine kleine Rechnung:

$$\begin{aligned}\widehat{g}(t) \;&=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-itx} f(x)\, e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}^n x \\ &=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix(t-\alpha)} f(x)\,\mathrm{d}^n x \;=\; \widehat{f}(t-\alpha)\end{aligned}$$

Der Beweis für die zweite Eigenschaft verläuft analog.

Der Faltungssatz folgt aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-itx} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, \frac{\mathrm{d}^n y\, \mathrm{d}^n x}{(2\pi)^n} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-it(x-y)} f(x-y)\, \frac{\mathrm{d}^n x}{(2\pi)^{n/2}}\, e^{-ity} g(y)\, \frac{\mathrm{d}^n y}{(2\pi)^{n/2}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-itz} f(z)\, \frac{\mathrm{d}^n z}{(2\pi)^{n/2}}}_{=\widehat{f}(t)}\, e^{-ity}\, g(y)\, \frac{\mathrm{d}^n y}{(2\pi)^{n/2}} \\
&= \widehat{f}(t) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ity} g(y)\, \frac{\mathrm{d}^n y}{(2\pi)^{n/2}} \;=\; \widehat{f}(t) \cdot \widehat{g}(t)\,.
\end{aligned}$$

Dabei folgt die zweite Zeile aus dem Satz von Fubini, und die dritte Zeile ergibt sich mittels der Substitution $z = x - y$. □

Beispiel 4.4. (Rechtecksfunktion)
Gegeben sei die (nicht-periodische) Rechtecksfunktion f durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \in [-a, a], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann bekommen wir

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x)\, \mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-itx}\, \mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\tfrac{-1}{it}\, e^{-itx}\right]_{-a}^{a} \\
&= \frac{-1}{it\sqrt{2\pi}} \left(e^{-ita} - e^{ita}\right) \;=\; \frac{2}{t\sqrt{2\pi}} \sin(ta)
\end{aligned}$$

für die Fourier-Transformierte von f. Insbesondere ist $\widehat{f}(0) = 2a/\sqrt{2\pi}$, wie man entweder direkt oder mit der l'Hospital'schen Regel ausrechnen kann.

Nun wollen wir einige Eigenschaften der Fourier-Transformation festhalten. Natürlich ist sie wieder linear, aber wir bekommen auch folgende Resultate.

Satz 4.5. *Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und sei $\lambda > 0$. Dann gilt:*

1. $g(x) = \overline{f(-x)} \quad \Rightarrow \quad \widehat{g}(t) = \overline{\widehat{f}(t)};$
2. $g(x) = f(\frac{x}{\lambda}) \quad \Rightarrow \quad \widehat{g}(t) = \lambda \widehat{f}(\lambda t).$

Weiter gilt, falls g durch $g(x) = -i x_k f(x)$ definiert ist und ebenfalls eine L^1-Funktion ist, dass $\widehat{f}$ partiell nach x_k differenzierbar ist mit der Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial t_k} \widehat{f}(t) = \widehat{g}(t)$$

Beweis. Die ersten beiden Behauptungen ergeben sich analog zu früheren Aussagen durch direktes Nachrechnen (Übung !).

Mit $tx = t_1x_1 + \cdots + t_nx_n$ bekommen wir für die partielle Ableitung

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t_k}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-itx} f(x)\,\mathrm{d}^n x &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\underbrace{\Big(\frac{\partial}{\partial t_k} e^{-itx}\Big)}_{=-ix_k e^{-itx}} f(x)\,\mathrm{d}^n x \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\underbrace{(-ix_k)f(x)}_{=g(x)}\, e^{-itx}\,\mathrm{d}^n x \;=\; \widehat{g}(t)\,,\end{aligned}$$

woraus sich die letzte Behauptung ableiten lässt (man beachte noch die Bedingung an die Funktion g). □

Als wichtiges Beispiel betrachten wir jetzt etwas ausführlicher die durch

$$f(x) = e^{-x^2/2}$$

definierte Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dann ist die Fourier-Transformierte $\widehat{f}$ durch

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = e^{-t^2/2}$$

gegeben. Die Funktion f ist also eine Eigenfunktion zur Fourier-Transformierten zum Eigenwert 1, also ist $\widehat{f} = f$. Dies beweist man in der Regel mit Methoden der komplexen Analysis. Da uns das nicht zur Verfügung steht, setzen wir zum Nachweis den Satz von Picard–Lindelöf ein (siehe auch Kapitel 6.2).

Wir wollen also zeigen, dass f und $\widehat{f}$ dasselbe Anfangswertproblem lösen, nämlich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y(x) = -x\, y(x) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1\,. \tag{26}$$

Klarerweise wird dies von f erfüllt, wie man direkt nachrechnen kann. Für $\widehat{f}$ bekommen wir mittels einer analogen Rechnung zum letzten Schritt im Beweis von Satz 4.5 und dem Einsatz von partieller Integration:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\widehat{f}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\Big(\frac{\partial}{\partial x} e^{-ix\xi}\Big) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\big(-i\xi\, e^{-ix\xi}\big) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\big(-\xi f(\xi)\big)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} f(\xi)\Big)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\big[e^{-ix\xi} f(\xi)\big]_{-\infty}^{\infty} - \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\big(-ix\, e^{-ix\xi}\big) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= 0 - \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = -x\,\widehat{f}(x)\,,\end{aligned}$$

und damit erfüllt auch $\widehat{f}$ die DGL aus Gl. (26). Unsere Behauptung stimmt also, wenn wir noch die Anfangsbedingung für $\widehat{f}$ verifizieren können.

Dazu bemerken wir, dass

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \, \mathrm{d}y,$$

mittels der Substitution $x = \sqrt{2}y$ im zweiten Schritt. Unsere Behauptung folgt nun aus folgendem Resultat.

Lemma 4.6. *Es gilt:*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

Beweis. Da es keine einfache Stammfunktion von f gibt, behelfen wir uns mit einem weiteren Trick, indem wir das Quadrat von I berechnen:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^{\infty} r \, e^{-r^2} \, \mathrm{d}r \\ &\overset{s=r^2}{=} \pi \int_0^{\infty} e^{-s} \, \mathrm{d}s = \pi \end{aligned}$$

Dabei entsteht die zweite Zeile durch eine Transformation auf *Polarkoordinaten*, also durch die Substitution $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$. Dies führt auf

$$\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{vmatrix} \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi.$$

Da klarerweise $I > 0$ gelten muss, folgt aus $I^2 = \pi$ nun $I = \sqrt{\pi}$ wie behauptet. □

Nun wollen wir der Frage nachgehen, ob bzw. wann die Funktion f aus der Fourier -Transformierten $\widehat{f}$ berechenbar ist. Gesucht ist also eine inverse Abbildung zur Fourier -Transformation. Dabei wird zunächst ein formaler und nicht ganz korrekter Ansatz verfolgt. Falls auch $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definieren wir eine Funktion g durch

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{itx} \, \widehat{f}(t) \, \mathrm{d}^n t.$$

Dies geschieht in Analogie zu unseren früheren Formeln. Dann sollte gelten (heuristisch):

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{it(x-y)} f(y) \, \mathrm{d}^n y \, \mathrm{d}^n t \\ &\overset{(?)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{it(x-y)} \, \mathrm{d}^n t \right)}_{=\delta(x-y)} f(y) \, \mathrm{d}^n y \\ &= \big(\delta * f\big)(x) \overset{(?)}{=} f(x). \end{aligned}$$