Dabei sollte δ eine Funktion sein, die bzgl. der Faltung das neutrale Element ist. Das erste (?) deutet an, dass es so eine Funktion in $L^1(\mathbb{R}^n)$ nicht gibt, und wir also nicht wissen, ob und wie man die Rechnung noch 'retten' kann, um das zweite (?) zu rechtfertigen.

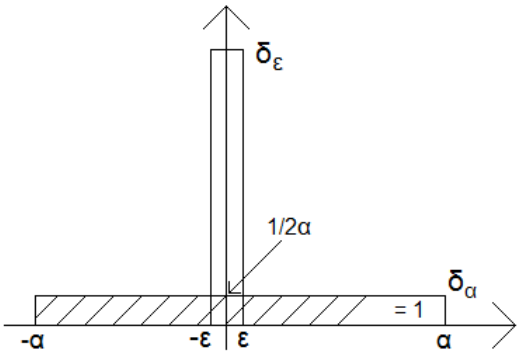

Abbildung 11: Illustration der Familie δ_ϵ mit Parameter $\epsilon > 0$, als Beispiel fuer eine approximierende Eins.

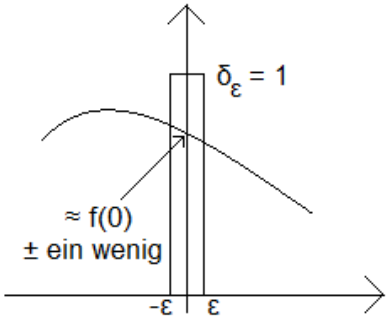

Abbildung 12: Approximation des Funktionswerts $f(0)$ durch das Integral.

Wir suchen also eine (symmetrische) 'Funktion' δ mit der Eigenschaft

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x \;=\; f(0)\,, \quad \text{für jede in 0 stetige Funktion } f.$$

Eine solche Funktion gibt es aber nicht. Man kann aber eine Familie von Funktionen finden, die von einem Parameter abhängt, die dann in einer kleinen ϵ-Umgebung von 0 den Funktionswert $f(0)$ immer besser 'herausholt'. Sei dazu $\delta_\epsilon = \frac{1}{2\epsilon} 1_{[-\epsilon,\epsilon]}$, vgl. Abb. 11 für eine Illustration. Dafür gelten folgende Eigenschaften ($\epsilon > 0$):

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \delta_\epsilon(x) dx &= 1\,, \\
\int_{\mathbb{R}} \delta_\epsilon(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{f(x)}{2\epsilon}\, \mathrm{d}x\,, \\
f \text{ stetig bei } 0 \;&\Rightarrow\; \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} \delta_\epsilon(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x \;=\; f(0)\,.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass man bei der letzten Eigenschaft Integral und Limes *nicht* vertauschen kann! Die Abbildungen 11 und 12 illustrieren die Eigenschaften. Man erhält durch sauberen Umgang mit solchen Familien $(\delta_\epsilon)_{\epsilon>0}$ (auch *approximierende Eins* genannt) folgenden Satz (hier ohne Beweis):

Satz 4.7. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft dass auch $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt, und sei g durch*

$$g(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{itx}\, \widehat{f}\,(t)\, \mathrm{d}^n t$$

definiert. Dann ist g stetig und es gilt $g(x) = f(x)$ fast überall. Also ist die Funktion g in L^1-Sinne die inverse Fourier-Transformierte von $\widehat{f}$.

Zu beachten ist hier, dass $\widehat{f}$ integrierbar eine starke Einschränkung ist, die *nicht* für jedes $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ erfüllt ist.

Folgerung 4.8. *(Eindeutigkeitssatz)*
Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\widehat{f} = 0$, also $\widehat{f}(t) = 0$ für fast alle $t \in \mathbb{R}^n$, dann ist auch $f = 0$, also $f(x) = 0$ fast überall.

Beweis. Die Funktion $\widehat{f}$ ist nach Voraussetzung integrierbar. Wir können also die Funktion g aus Satz 4.7 definieren, und bekommen $g(x) = 0$ für alle (!) x. Dann folgt $f = g$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, das heisst $f(x) = g(x) = 0$ fast überall. □

Man kann die Fourier-Transformation in verschiedenen Räumen betrachten, jeweils mit anderen Gegebenheiten. Weit verbreitet sind:

- Schwartz-Raum: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (Raum der unendlich schönen Funktionen)
  Für $n = 1$: C^∞, $f^{(n)}(x)P(x) \xrightarrow{x\pm\infty} 0$ für jedes $n \geq 0$ und jedes Polynom P (z.B. $f(x) = e^{-x^2/2}$). Diese Funktionen sind also beliebig oft differenzierbar und verschwinden für sehr große bzw. kleine x-Werte 'sehr schnell'.
- Temperierte Distributionen: $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
  $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ linear und stetig (z.B. $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$). Die Fourier-Transformation ist dann mittels $\widehat{T}(\varphi) = T(\widehat{\varphi})$ definiert.
- Hilbert-Raum: $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n) = \left\{ f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}^n x < \infty \right\}$
  Hier wird vieles wieder systematisch und besonders schön.

4.3 Fourier-Tranformation auf $L^2(\mathbb{R})$

Wir wollen jetzt die Fourier-Transformation auf dem Hilbert-Raum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ genauer studieren. Wir beschränken uns auf den eindimensionalen Fall, die Erweiterung auf den $\mathbb{R}^n$ kann dann analog behandelt werden. Wir wählen in $\mathcal{H}$ das Skalarprodukt

$$\langle f \,|\, g \rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}\, g(x)\, \mathrm{d}x$$

und die Norm entsprechend als $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f \,|\, f \rangle}$. Als Hilbert-Raum ist $\mathcal{H}$ vollständig, also konvergieren alle Cauchy-Folgen in $L^2(\mathbb{R})$.

Der Raum $\mathcal{H}$ ist natürlich ∞-dimensional, und die Einheitskugel des Raums ist *nicht* kompakt. Zum Beispiel sieht man, dass $x \mapsto x^n e^{-x^2/2}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine Funktion in $\mathcal{H}$ definiert. Diese sind aber linear unabhängig, denn für jede endliche Folge (α_n) komplexer Zahlen gilt:

$$\sum_{n=0}^{N} \alpha_n\, x^n\, e^{-x^2/2} \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{alle } \alpha_n = 0\,.$$

Für Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ wissen wir bereits, wie wir $\widehat{f}$ zu definieren haben. Zum Glück liegt dieser Schnitt in $L^2(\mathbb{R})$ dicht, so dass wir eine Erweiterung auf den Hilbert-Raum durch eine eindeutige Fortsetzung bekommen.

Satz 4.9. *(Satz von Plancherel)*
Es gibt eine eindeutige Abbildung $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \;\Rightarrow\; \mathcal{F}(f) = \widehat{f}$;
2. $\mathcal{F}$ *ist eine Isometrie, d.h.* $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$ *(bzw.* $\langle \mathcal{F}f | \mathcal{F}f\rangle = \langle f|f\rangle$*);*
3. $\mathcal{F}$ *ist ein Hilbertraum-Isomorphismus, d.h. auf* $\mathcal{H}$ *existiert eine eindeutige Inverse; insbesondere ist* $\mathcal{F}$ *unitär;*
4. *Mit* $\varphi_A(t) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-A}^{A} e^{itx} f(x)\,\mathrm{d}x$ *und* $\psi_A(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-A}^{A} e^{-itx} \widehat{f}(t)\,\mathrm{d}t$ *gilt:* $\big\|\varphi_A - \widehat{f}\big\|_2 \xrightarrow{A\to\infty} 0$ *und* $\big\|\psi_A - f\big\|_2 \xrightarrow{A\to\infty} 0$.

Für einen Beweis dieses Satzes verweisen wir auf [7, Thm. 9.13].

An dieser Stelle wollen wir die beiden unter Punkt 2. genannten Bedingungen für die Isometrieeigenschaft etwas genauer betrachten.

Lemma 4.10. *Sei L ein linearer Operator auf dem komplexen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ (also z.B. $\mathcal{L} = \mathcal{F}$ auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$). Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. $\|\mathcal{L}(f)\|_2 = \|f\|_2$ *(Erhaltung der Norm) gilt für alle $f \in \mathcal{H}$;*
2. $\big\langle \mathcal{L}(f) | \mathcal{L}(g)\big\rangle = \langle f\,|\,g\rangle$ *(Erhaltung des Skalarprodukts) gilt für alle $f, g \in \mathcal{H}$.*

Beweis. Wegen $\|f\| = \sqrt{\langle f\,|\,f\rangle}$ folgt die erste Aussage einfach aus der zweiten indem wir $g = f$ wählen.

Für die umgekehrte Richtung benötigen wir die sogenannte (komplexe) *Polarisationsgleichung*, also

$$\begin{aligned}
&\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\,\|f-ig\|^2 - i\,\|f+ig\|^2 \\
&\quad= \|f\|^2 + \|g\|^2 + \langle f\,|\,g\rangle + \langle g\,|\,f\rangle - \|f\|^2 - \|g\|^2 + \langle f\,|\,g\rangle + \langle g|f\rangle + \\
&\qquad i\big(\|f\|^2 - \|g\|^2 - i\langle f\,|\,g\rangle + i\langle g|f\rangle - \|f\|^2 + \|g\|^2 + i\langle f|g\rangle - i\langle g|f\rangle\big) \\
&\quad= 4\,\langle f\,|\,g\rangle.
\end{aligned}$$

Damit bekommen wir dann

$$\begin{aligned}
\big\langle \mathcal{L}(f)\,|\,\mathcal{L}(g)\big\rangle &= \frac{1}{4}\Big(\big\|\underbrace{\mathcal{L}(f)+\mathcal{L}(g)}_{=\mathcal{L}(f+g)}\big\|^2 - \ldots + \ldots - i\,\big\|\underbrace{\mathcal{L}(f)+i\,\mathcal{L}(g)}_{=\mathcal{L}(f+ig)}\big\|^2\Big) \\
&= \frac{1}{4}\big(\|f+g\|^2 - \ldots + \ldots - \|f+ig\|^2\big) \;=\; \langle f\,|\,g\rangle,
\end{aligned}$$

und das Lemma ist bewiesen. □

Bemerkung 4.11. In einem euklidischen Vektorraum V über $\mathbb{R}$ mit $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ gilt $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$ und daher folgt hier einfach

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \;=\; \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x|y\rangle + \underbrace{\langle y|x\rangle}_{=\langle x|y\rangle} - \|x\|^2 - \|y\|^2 + \langle x|y\rangle + \underbrace{\langle y|x\rangle}_{=\langle x|y\rangle} \;=\; 4\,\langle x|y\rangle,$$

was man auch die *reelle* Polarisationsgleichung nennt. Für eine allgemeine lineare Abbildung $\mathcal{L}\colon V \longrightarrow V$ sind dann auch in diesem Raum äquivalent:

1. $\|\mathcal{L}(x)\| = \|x\|$ gilt für alle $x \in V$;
2. $\langle \mathcal{L}(x) | \mathcal{L}(y) \rangle = \langle x | y \rangle$ gilt für alle $x, y \in V$.

Normerhaltung und Erhaltung des Skalarprodukts in Hilbert-Räumen sind also stets äquivalente Bedingungen.

Nun kommen wir zu einer überraschenden Eigenschaft der Fourier-Transformation $\mathcal{F}$ und ihrer Inversen, sowie einer wichtigen Konsequenz für $L^2(\mathbb{R})$. Sei $\widehat{g} = \mathcal{F}(g)$ mit $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Dann ist

$$\big(\mathcal{F}^2 g\big)(x) \;=\; \big(\mathcal{F}(\mathcal{F}(g)\big)(x) \;=\; \big(\mathcal{F}(\widehat{g})\big)(x)) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}\, \widehat{g}(y)\, \mathrm{d}y \;=\; g(-x)\,,$$

wobei man über den letzten Schritt ein wenig nachdenken sollte, bis er klar wird. Also ist $\big(\mathcal{F}^2(g)\big)(x) = g(-x)$ für alle g aus einer dichten Teilmenge von $L^2(\mathbb{R})$, und nach dem Satz von Plancherel (also Satz 4.9) gilt diese Aussage dann auf ganz $L^2(\mathbb{R})$. Es folgt also

$$\mathcal{F}^4 \;=\; \mathbb{1}$$

auf ganz $L^2(\mathbb{R})$. Die Abbildung $\mathcal{F}$ ist also ein unitärer Operator mit $\mathcal{F}^4 = \mathbb{1}$.

Ist nun λ ein Eigenwert von $\mathcal{F}$, also $\mathcal{F}(g) = \lambda g$ für ein $0 \neq g \in L^2(\mathbb{R})$, so folgt

$$g \;=\; \mathcal{F}^4(g) \;=\; \lambda^4 g \quad \Rightarrow \quad \lambda^4 = 1\,.$$

Alle Eigenwerte von $\mathcal{F}$ müssen also 4. Einheitswurzeln sein, d.h. $\lambda \in \{1, i, -1, -i\}$. Damit haben wir folgendes Resultat gezeigt.

Satz 4.12. *Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ ist eine unitäre Transformation der Ordnung 4 mit den Eigenwerten $1, -i, -1, i$.*

Beweisskizze. Wir wissen schon, dass $\mathcal{F}^4 = \mathbb{1}$, und dass keine anderen Eigenwerte vorkommen können. Wir müssen also noch zeigen, dass alle 4. Einheitswurzeln wirklich auftreten.

Die durch $x \mapsto e^{-x^2/2}$ definierte Funktion ist eine Eigenfunktion zum Eigenwert 1, wie wir ebenfalls schon bewiesen haben. Nun gehen wir konstruktiv vor, indem wir induktiv weitere Eigenfunktionen angeben. Dazu setzen wir rekursiv

$$H_{n+1} \;=\; -2x\, H_n(x) - 2n\, H_{n-1}(x)$$

für $n \in \mathbb{N}$, mit $H_0(x) = 1$ und $H_1(x) = -2x$. Dann ist $H(x)$ ein Polynom n-ter Ordnung, bekannt als n-tes *Hermite-Polynom*. Wir gehen einen Schritt weiter und betrachten die *Hermite-Funktionen*

$$h_n(x) \;=\; \alpha_n\, H_n(x)\, e^{-x^2/2},$$

mit geeigneten Normierungskonstanten α_n. Nun rechnet man per Induktion nach, dass h_n eine Eigenfunktion von $\mathcal{F}$ zum Eigenwert $(-i)^n$ ist. □

Die Hermite-Funktionen haben noch eine ganze Reihe weiterer Eigenschaften, auf die wir hier nicht näher eingehen können. Sie treten z.B. beim harmonischen Oszillator in der Quantenmechanik auf. Für uns von Bedeutung ist aber das folgende Resultat, das wir ohne Beweis angeben (den man wieder mit einigen Tricks per Induktion führen kann).

Satz 4.13. *Die Hermite-Funktionen* $\{h_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ *bilden eine Basis von* $L^2(\mathbb{R})$*, die aus Eigenfunktionen der Fourier-Transformation besteht. Dabei gilt*

$$\mathcal{F}(h_n) \;=\; (-i)^n\, h_n$$

für $n \in \mathbb{N}_0$*. Mit* $\alpha_n = (2^n\, n!\sqrt{n})^{-1/2}$ *gilt außerdem*

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{h_m(x)} \cdot h_n(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \delta_{m,n}$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$*. Es handelt sich dann um eine ONB bzgl. dieses Skalarprodukts.* □

Hier ist zu beachten, dass wir weiter oben einen Vorfaktor bei der Definition des Skalarproduktes gewählt hatten, der in dieser Formulierung nicht auftritt (man kann das natürlich ineinander umrechnen). Die Basiseigenschaft beinhaltet die früher schon behandelte Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h_n\rangle\langle h_n| \;=\; \mathbb{1}\,,$$

die wir jetzt noch elegant einsetzen können, um die Fourier-Transformation einer beliebigen L^2-Funktion zu berechnen.

Folgerung 4.14. *Bezüglich der Basis* $\{h_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$*, mit der Wahl der Konstanten* α_n *wie oben, ist* $\mathcal{F}$ *diagonal, und es gilt* $\mathcal{F} = \mathrm{diag}(1, -i, -1, i, 1, -i, -1, i, \ldots)$*, oder, in Dirac-Notation,*

$$\mathcal{F} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} |h_n\rangle (-i)^n \langle h_n|\,.$$

Entwickeln wir eine beliebige Funktion $g \in L^2(\mathbb{R})$ *in unsere Basis aus normierten Hermite-Funktionen, also*

$$|g\rangle \;=\; \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell |h_\ell\rangle \quad \textit{mit} \quad c_\ell \;=\; \langle h_\ell | g\rangle$$

(was immer geht wegen der Vollständigkeitsrelation, mit den Koeffizienten gemäß der Gauß'schen Approximationsaufgabe), so bekommen wir

$$\mathcal{F}|g\rangle \;=\; \sum_{n,\ell} |h_n\rangle (-i)^n \langle h_n|c_\ell|h_\ell\rangle \;=\; \sum_{n,\ell} |h_n\rangle (-i)^n c_\ell \underbrace{\langle h_n|h_\ell\rangle}_{=\delta_{n,\ell}} \;=\; \sum_{n} c_n\,(-i)^n\,|h_n\rangle\,.$$

Hieraus ergibt sich auch noch eine zuweilen sehr nützliche Zerlegung des $L^2(\mathbb{R})$, nämlich

$$L^2(\mathbb{R}) \;=\; \bigoplus_{\ell=0}^{3} \big\langle h_{4m+\ell} \mid m \in \mathbb{N}_0 \big\rangle_{\mathbb{C}}.$$

Insbesondere lässt sich jedes $g \in L^2(\mathbb{R})$ eindeutig als Summe von 4 Termen schreiben,

$$g \;=\; g_0 + g_1 + g_2 + g_3 \quad \text{mit} \quad \mathcal{F}(g_\ell) \;=\; (-i)^\ell \, g_\ell .$$

Dies kann man als eine Verallgemeinerung der Zerlegung einer Funktion f in gerade und ungerade Anteile ansehen, also

$$f(x) \;=\; \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{=f_+(x)} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{=f_-(x)}$$

mit $f_\pm(-x) = \pm f_\pm(x)$.