

Mathematische Methoden der Biowissenschaften III

Übungsblatt 11

(40)* Seien \mathcal{H} ein reeller Hilbertraum und $L : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (1) $\forall x \in \mathcal{H} : \|L(x)\| = \|x\|.$
- (2) $\forall x, y \in \mathcal{H} : \langle L(x) | L(y) \rangle = \langle x | y \rangle.$

(3* Punkte)

(41)* Betrachten Sie die Funktion

$$f : [0; \infty[\rightarrow [0; \infty[, \quad f(x) = \log(x + 2).$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Funktion f genau einen Fixpunkt x^* besitzt.
- (b) Betrachten Sie die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, die rekursiv durch

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_0 = 10,$$

definiert ist. Geben Sie ein möglichst kleines $N \in \mathbb{N}$ an, so dass

$$|x^* - x_n| < 0.01$$

für alle $n \geq N$ gilt?

Hinweis: Banachscher Fixpunktsatz und Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

(3*+3* Punkte)

(42) Sei f eine 1-periodische Funktion.

- (a) Wie sehen die Fourier-Koeffizienten a_n und b_n und die Fourier-Reihe von f in diesem Fall aus?
- (b) Sei $f(x) = x$ auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ mit 1-periodischer Fortsetzung. Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von f .

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $h(x) = f(\frac{x}{2\pi})$.

(3+2 Punkte)

(43) Betrachten Sie die Funktion $f(j) = e^{-2\pi i j / N}$, $N \in \mathbb{N}$ und $0 \leq j \leq N - 1$.

- (a) Bestimmen Sie die diskrete Fourier-Transformation von f .

(b) Bestimmen Sie $f * f$, indem Sie die Definition der diskrete Faltung verwenden.

(c) Bestimmen Sie $f * f$ mit Hilfe von Teil (a) und Aufgabe 38.

(2+2+2 Punkte)

(44) Bestimmen Sie explizit die diskrete Fourier-Transformation von $(1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$, indem Sie die schnelle Fourier-Transformation Schritt für Schritt benutzen.

(3 Punkte)