

Mathematische Methoden der Biowissenschaften III

Übungsblatt 13

(49) Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass A ein Markov-Generator ist.
- (b) Zeigen Sie, dass $A^n = (-1)^{n+1}A$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Berechnen Sie e^{tA} mit $t \in \mathbb{R}$.

(1+2+3 Punkte)

Hier noch ein paar Definitionen, da diese noch nicht in der Vorlesung vorgekommen sind:

Eine Matrix $M \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ heißt *Markov-Matrix* wenn folgendes gilt:

- (a) $M_{ij} \geq 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$
- (b) $\sum_j M_{ij} = 1$ gilt für alle $1 \leq i \leq n$

Eine Matrix $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ heißt *Markov-Generator* wenn folgendes gilt:

- (a) $A_{ij} \geq 0$ für alle $i \neq j$
- (b) $\sum_j A_{ij} = 0$ gilt für alle $1 \leq i \leq n$

(50) Sei A eine $n \times n$ -Matrix, und betrachte die Abbildung

$$\|\cdot\| : \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|A\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ eine Norm ist.
- (b) Zeigen Sie, dass $\|A\| = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$.
- (c) Zeigen Sie, dass $\|Ax\|_2 \leq \|A\| \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(2+2+1 Punkte)

(51) Wir betrachten den $\mathbb{C}^n$, versehen mit einer Norm $|\cdot|$ und der zugehörigen Matrix-Norm $\|\cdot\|$. Sei $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C})$.

- (a) Zeigen Sie, dass $e^{-\|A\|} \leq \|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.
- (b) Besitzt die Gleichung $e^A = 0$ eine Lösung?

(2+2 Punkte)

Abgabe Mittwoch, 24.01.2024, 12.00, im Postfach des Tutors