Prof. Dr. Michael Baake
Fakultät für Mathematik,
Universität Bielefeld

Wintersemester 2023/24
Bielefeld, 31.10.2023

Mathematische Methoden der Biowissenschaften III

Übungsblatt 4

(12) Betrachten Sie die folgende 2π-periodische Funktion

$$f: (-\pi, \pi] \to \mathbb{C}, \quad f(x) = x + \mathrm{i}|x|.$$

(a) Bestimmen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten c_n von f.

(b) Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe von f.

(c) Setze

$$f_N(x) := \sum_{|n| \leq N} c_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

Bestimmen Sie $f_N(x)$ für $N = 0, 1, 2$ (in kartesischen Koordinaten).

(2+1+2 Punkte)

(13) Es sei $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ ein reelles Polynom, dessen Koeffizienten die Gleichung $\sum_{j=0}^{n} a_j^2 = 1$ erfüllen. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 |p(x)| \, dx \leq \frac{\pi}{2}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Cauchy–Schwarz Ungleichung mit einem geeigneten Skalarprodukt und die Formel für die (endliche) geometrische Reihe, gefolgt von einer weiteren Abschätzung. **(4 Punkte)**

(14) Es seien $f, g \in C([-\pi, \pi])$.

(a) Beweisen Sie den Satz des Pythagoras:

$$f \perp g \implies \|f + g\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2.$$

(b) Beweisen Sie die Parallelogrammgleichung:

$$\|f + g\|_{L^2}^2 + \|f - g\|_{L^2}^2 = 2 \cdot \left(\|f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2 \right).$$

(2+2 Punkte)

(15) Seien $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 2)$ und $v_3 = (1, -1, 2)$ drei Elemente des $\mathbb{R}^3$, der mit dem Standard-Skalarprodukt ausgestattet ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\{u_1, u_2, u_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ mit Hilfe des Orthonormalisierungsverfahren von Gram–Schmidt für v_1, v_2, v_3.

(1+2 Punkte)

Abgabe Mittwoch, 08.11.2023, 12:00, im Postfach des Tutors