Mathematische Methoden der Biowissenschaften III

Übungsblatt 5

(17) Wir betrachten den metrischen Raum $(C([0,1]), d)$, wobei die Metrik d gegeben ist durch $d(f,g) := \|f - g\|_\infty$.

(a)* Zeigen Sie, dass $(C([0,1]), d)$ vollständig ist.

(b) Die Abbildung F sei definiert durch

$$F : C([0,1]) \to C([0,1]), \quad \big(F(f)\big)(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,t\,f(t)\;\mathrm{d}t + \frac{5}{6}x.$$

Zeigen Sie, dass F genau einen Fixpunkt besitzt.

(c) Bestimmen Sie den Fixpunkt von F.

Hinweis: Verwenden Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

(3*+3+2 Punkte)

(18) Es bezeichne P den Vektorraum aller reellen Polynome p auf dem Intervall $[0,2]$ mit $\deg(p) \leq 2$. Wir statten P mit dem Skalarprodukt

$$\langle f \mid g \rangle = \int_0^2 f(x)\,g(x)\;\mathrm{d}x.$$

aus.

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von P.

(b) Bestimmen Sie das Polynom $p \in P$, das das Integral

$$\int_0^2 |\mathrm{e}^x - p(x)|^2\;\mathrm{d}x$$

minimiert.

(3+3 Punkte)

(19) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\;\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Betrachten Sie den Ausdruck $\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\;\mathrm{d}x\right)^2$ und verwenden Sie Polarkoordinaten.

(3 Punkte)

(20) Die Funktion $f \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ habe die Fourierkoeffizienten c_n.

(a) Zeigen Sie, dass die Fourierkoeffizienten der Funktion $g(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}at} f(t)$ mit $a \in \mathbb{Z}$ durch c_{n-a} gegeben sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Fourierkoeffizienten der Funktion $h(t) = f(t-b)$ mit $b \in \mathbb{R}$ durch $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nb} c_n$ gegeben sind.

Bemerkung: Hier wird nur nach der Berechnung der Koeffizienten gefragt, zur Wohldefiniertheit erfahrt ihr etwas in der folgenden Vorlesung.
(2+2 Punkte) .

Abgabe Mittwoch, 15.11.2023