Mathematische Methoden der Biowissenschaften III

Übungsblatt 7

(25) Es bezeichne $\mathrm{BV}[a,b]$ die Menge aller Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, die von beschränkter Variation sind.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{BV}[a,b]$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktionen $f, g : (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = |x| \quad \text{und} \quad g(x) = 1_{(0,\pi)}(x) + \frac{1}{2} \cdot 1_{\{0,\pi\}}(x)$$

(inklusive 2π-periodischer Fortsetzung) von beschränkter Variation sind.

Hinweis: Es sei daran erinnert, dass eine Funktion genau dann von beschränkter Variation ist, wenn sie sich als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen schreiben lässt.

(1+3 Punkte)

(26) Bestimmen Sie die Fourier-Transformation $\widehat{f}$ in den folgenden Fällen:

(a) $f(x) = 1_{[-a,a]}(x),\ a > 0.$

(b) $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|},\ a > 0.$

(2+3 Punkte)

(27) Betrachten Sie die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{e}^{-itx}\, dx.$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{dt} F(t) = -t \cdot F(t).$$

(b) Folgern Sie daraus, dass

$$F(t) = F(0) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}},$$

wobei $F(0) = 1$.

(c) Verifizieren Sie, dass $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ seine eigene Fourier-Transformation ist.

Hinweis: Aufgabe (19) kann hier hilfreich sein. **(3+2+1 Punkte)**

(28) Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\lambda > 0$. Zeigen Sie:

(a) $g(x) := f(-x) \implies \widehat{g}(t) = \widehat{f}(-t)$.

(b) $g(x) := \overline{f(-x)} \implies \widehat{g}(t) = \overline{\widehat{f}(t)}$.

(c) $g(x) := f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \implies \widehat{g}(t) = \lambda\,\widehat{f}(\lambda t)$.

(1+1+2 Punkte)

Abgabe Mittwoch, 29.11.2023, 12 Uhr, Postfach des Tutors