15.10.2024
U2-135

Vectorräume und Matrizen

Defi Ein (reelle) Vecktorraum V ist eine Menge mit zwei Operation: Addition $+: V\times V \to V$, $(u,v) \to u+v$ und Multiplikation $\cdot : \mathbb{R}\times V \to V$, $(\lambda,u) \to \lambda u$

mit folgenden Eigenschaften:

i) $u+v=v+u$

ii) $(u+v)+w = u+(v+w)$

iii) $\exists\, 0 \in V$ st $0+u=u+0=0$ $\forall u \in V$ (heißt nullvector)

iv) $\forall v \in V, \exists\, a \in V$ st $a+v=v+0=0$

v) $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ st $\forall v \in V$, $1v=v$

vi) $(\lambda\gamma)v = \lambda(\gamma v)$ $\forall v \in V$ $\forall \lambda,\gamma \in \mathbb{R}$

vii) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$ $\forall u,v \in V$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

viii) $(\lambda+\gamma)v = \lambda v + \gamma v$ $\forall v \in V$ $\forall \gamma,\lambda \in \mathbb{R}$

Beispiel:

i) $\mathbb{R}^2 = \{(u,v) \mid u,v \in \mathbb{R}\}$ mit $v+u = (v_1,v_2)+(u_2,u_2)$
$= (v_1+u_1, v_2+u_2)$

und $\lambda v = (\lambda v_1, \lambda v_2)$

Notiz: $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ via $(a,b) \leftrightarrow a+bi$ Übung: Überprüfen die über Eigenschaften!
↳ Isomorph.

ii) $\mathbb{R}[x] = \{f(x) \mid f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0,\ n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R}\}$
mit $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$; $(\lambda\cdot g)(x) = \lambda \cdot g(x)$.

iii) $M^{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$

mit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$,

$$A+B = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & b_3+b_4 \end{pmatrix}; \quad \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 \\ \lambda a_3 & \lambda a_4 \end{pmatrix}$$

Natürlich, auch $M^{n\times n}(\mathbb{R})$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ein VR ist.

iv) $L^p(\mathbb{R}) = \{ f \mid f: \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, d\mu(x) < \infty \}$
$1 \leq p < \infty$ ↑ Lebesgue meas

mit regelmäßig Addition und Multiplication (mehr später)

v) $\mathbb{Z}$ ist nicht ein VR!!! (über $\mathbb{R}$)
Annehmen durch Wiederspruch, $\mathbb{Z}$ ist eine VR. Dann, $1_{\mathbb{Z}} = 1$ von $\mathbb{Z}$,
$1_{\mathbb{Z}} = 1_{\mathbb{Z}} = 1_{\mathbb{Z}} = (1/2 + 1/2) 1_{\mathbb{Z}} = 1/2\, 1_{\mathbb{Z}} + 1/2\, 1_{\mathbb{Z}}$,

Als $\mathbb{Z}$ ein VR ist, mit $1/2 \in \mathbb{R}$, wir haben $1/2 \cdot 1_{\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$.
Aber $\neg\exists\, n \in \mathbb{Z}$ st $n + n = 1$, deshalb $\mathbb{Z}$ $\neg$ VR. $\lightning$

Def: Sei V eine VR, $E \subset V$ ist eine Unterraum wenn, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,
$\forall x, y \in V$, $x + y \in V$ und $\lambda x \in V$.

Ex: $S^{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ Symmetrische Mat.

Def: Die Menge $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $v_i \in V$ ist heißt lineer unabhängig
wenn die Vektorgleichung $x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n = 0$ hat
nur die triviale Lösung $x_i = 0 \ \forall i$
Die Nummer n von $v_i \in S$ ist die dimension of $U = \mathrm{Span}(S) =: \dim(U)$
und heißt S eine Basis von U.
Wenn $V = \mathrm{Span}(S)$, sagen wir V wird durch S erzeugt,
bezeichnet $V = \langle S \rangle$.

(T) Dimensionsatz: Jede Basis von eine endlichdimensionen VR hat die gleiche Anzahl von Vektoren.

Pf: Übung (oder see online notes / textbook)

$\Longrightarrow$

Präsenzübung:

1) $f(t) = (4t^2 - t)\cos(x)$

Product Rule

$(fg)' = f'g + fg'$

Sol: $f'(t) = (8t-1)\cos(x) + (4t^2-t)\cdot(-\sin(x))$

2) $f(x) = (1+\sqrt{x^3})(x^{-3} - 2\sqrt[3]{x})$

Sol: $\sqrt[m]{x^n} \quad x^{n/m}$

$\Rightarrow f'(x) = \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)(x^{-3} - 2x^{1/3}) + (1+x^{3/2})\left(-3x^{-4} - \frac{2}{3}x^{-2/3}\right)$

~~3)~~ $f(x) = \frac{3\sin(x) + x^4}{1+x^2} = (3\sin(x) + x^4)(1+x^2)^{-2}$

↳ chain-rule

$f'(x) = \frac{(3\cos(x) + 4x^3)(1+x^2) - (3\sin(x)+x^4)(2x)}{(1+x^2)^2}$

Quotient

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

3) $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$\tan'(x) = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)}$

$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$

4) $f(x) = (4x^2+1)^{2024}$

$f'(x) = 2024(4x^2+1)^{2023}\cdot 8x$

Chain/Ketten

$(f\circ g)' = (f'\circ g)\cdot g'$

5) $f(x) = \sqrt{\tan(\lambda x)} = (\tan(\lambda x))^{1/2}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(\tan(\lambda x))^{-1/2}\cdot(\tan(\lambda x))'$

$= \frac{1}{2\sqrt{\tan(\lambda x)}} \cdot \sec^2(\lambda x)\cdot(\lambda x)'$

$= \frac{\lambda\sec^2(\lambda x)}{2\sqrt{\tan(\lambda x)}}$

6) $\int_0^1 3t^{-4}(2+4t^{-3})^{-7}\,dt$ $\quad u = 2+4t^{-3}$, $du = -4 \cdot 3 t^{-4}\,dt$

$\Leftrightarrow 3t^{-4}dt = \frac{-1}{4}du$

Endpunkt: $t=0 \Rightarrow u = 2$, $t=1 \Rightarrow u = 2+4=6$ $\quad$ U-Sub

$\Rightarrow = \int_2^6 \frac{-1}{4}(u)^{-7}\,du$

$= \frac{-1}{4}\frac{u^{-6}}{-6}\Big|_2^6$

$= \frac{1}{24}[6^{-6} - 6^{-2}]$

7) U-sub to eliminate root (useful for some integrals)

$\sqrt{4-9x^2}$ Ansatz $\approx \sqrt{1-\sin^2(x)} = \sqrt{\cos^2(x)} = |\cos(x)|$

$\Rightarrow x = \frac{2}{3}\sin(\theta) \Rightarrow \sqrt{4 - 9\cdot\frac{4}{9}\sin^2(\theta)} = 2\sqrt{1-\sin^2(\theta)}$

$= 2|\cos(\theta)|$

Trigonometric Substitution

Partiale-Integ / IBP

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

8) $\int e^t\cos(t)\,dt$ $\quad u=\cos(t)$, $du = -\sin(t)dt$, $dv = e^t dt$, $v = e^t$

$= e^t\cos(t) - -\int e^t\sin(t)\,dt$

$= e^t\cos(t) + \int e^t\sin(t)$ $\quad u = \sin(t)$ $dv = e^t\,dt$

$= e^t\cos(t) + e^t\sin(t) + -\int e^t\cos(t)\,dt$

$\Leftrightarrow 2\int e^t\cos(t)\,dt = \frac{e^t\cos(t) + e^t\sin(t)}{2}$

Notiz: $f(x,y) = xy$ ist nicht linear !

Def: $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist linear wenn $L((x,y)+(\tilde{x},\tilde{y})) = L(x,y) + L(\tilde{x},\tilde{y})$

$f((x,y)+(\tilde{x},\tilde{y})) = f((x+\tilde{x}, y+\tilde{y})) = (x+\tilde{x})(y+\tilde{y}) = xy + x\tilde{y} + \tilde{x}y + \tilde{x}\tilde{y}$

$f((x,y)) + f(\tilde{x},\tilde{y}) = xy + \tilde{x}\tilde{y} \neq f((x,y)+(\tilde{x},\tilde{y}))$