

Wiederholung von Fourer-Reihe / Trans.

07.01.25
112-135

Def: $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(\pi) = f(-\pi)$, die Fourier-Reihe ist
↳ oder 2π -periodische

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

mit
$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \end{aligned} \right\} \text{Fourier-Koeff.}$$

Die komplexe FR: $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$; $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ $\textcircled{+}$
↳ Q: Welche Art von Konv. wird angenommen? $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds$

⊕ 3.3: $\textcircled{+}$ gilt für all 2π -peri. stetige Funkt. f ,
mit Konvergenz im Mittel, d.h. $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$
↳ $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$

Def: $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-itx} f(x) d^n(x)$

ist die Four.-Transformation von f .

Eigenschaften

a) $g(x) = f(x) e^{i\alpha x} \Rightarrow \hat{g}(t) = \hat{f}(t - \alpha)$

b) $g(x) = f(x - \alpha) \Rightarrow \hat{g}(t) = e^{-i\alpha t} \hat{f}(t)$

c) $h = f * g \Rightarrow \hat{h} = \hat{f} \cdot \hat{g}$ mit $(f * g)(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau) g(t - \tau) d^n \tau$

d) $g(x) = \overline{f(-x)} \Rightarrow \hat{g}(t) = \overline{\hat{f}(t)}$

e) $g(x) = f(x/\lambda) \Rightarrow \hat{g}(t) = \lambda \hat{f}(\lambda t)$

f) $g(x) = -i x_k f(x) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t_k} \hat{f}(t) = \hat{g}(t)$

⊕ 4.9 (Plancherel Satz)

∃! $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ sd

1) $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$

2) $\mathcal{F}$ ist eine Isometrie

3) $1 \leftarrow \leftarrow 1$ Hilbertraum Isomorphismus und ist unitar

4) $\varphi_A(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A e^{-itx} f(x) dx$, $\psi_A(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A e^{itx} \hat{f}(t) dt$

$$\|\varphi_A - \hat{f}\|_2 \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0; \quad \|\psi_A - f\|_2 \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0$$

⊕ 4.12 + 4.13 Die FT hat Eigenwerte $\pm 1, \pm i$, und Eig-Funktionen $\{h_n, |n \in \mathbb{N}_0\}$ (Hermite-Funktionen)

Def: Die DFT Df von $f: C_N \rightarrow \mathbb{C}$ ist $(f = (f_0 \dots f_{N-1}))$

$$(Df)(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} \quad n \in C_N$$

$\hookrightarrow f_k = f(t_k), \{f(t_k)\}$ Datensatz

mit Matrix-Schreibweise $Df = M_N \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$, mit

$$M_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{w} & \frac{1}{w^2} & \dots & \frac{1}{w^{N-1}} \\ 1 & \frac{1}{w^2} & \frac{1}{w^4} & \dots & \frac{1}{w^{2(N-1)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \bar{w}^{N-1} & \bar{w}^{2(N-1)} & \dots & \bar{w}^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \quad \text{wobei } w = e^{\frac{2\pi i}{N}}$$

eine Prim. Einheitswurzel

Def: $f, g \in L^1(C_N)$, $\forall k \in C_N$, die diskrete Faltung $f * g$ ist def. durch

$$(f * g)(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f(j) g(k-j)$$

$\hookrightarrow$ Argumente mod N berechnet

⊕ 5.9 (Diskrete Faltung Satz)

$$f, g \in L^1(C_N) \Rightarrow D(f * g) = (Df) \cdot D(g).$$

Präsenzübung:

1a) Finden Sie die Fourier-R. für $f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

Lös: $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 1 dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 0 dx$
 $= \frac{1}{2\pi} x \Big|_{-\pi}^0 = \frac{\pi}{2\pi} = 1$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \cos(nx) dx = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^0 = \frac{1}{n\pi} \sin(nx) \Big|_{-\pi}^0$$

$$= \frac{1}{n\pi} [0 + \sin(n\pi)] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \sin(nx) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right] \Big|_{-\pi}^0 = -\frac{1}{n\pi} [\cos(nx)] \Big|_{-\pi}^0$$

$$= -\frac{1}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] = -\frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

$$\therefore b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ -\frac{2}{n\pi} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} b_n \sin(nx)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{-2}{\pi} \sin(x) + \frac{-2}{3\pi} \sin(3x) + \frac{-2}{5\pi} \sin(5x) //$$

b) Finden Sie eine x zu zeigen $\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{-1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{-1}{7} + \dots$

Lös: Wir wollen $\sin(x) = 1$, $\sin(3x) = -1$, $\sin(5x) = -1$.

Mit $x = \frac{\pi}{2}$, $f(x) = 0$, und

$$0 = \frac{1}{2} + \frac{-2}{\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{5} \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \dots \right]$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2} + \frac{-2}{\sqrt{1}} \left[1 + \frac{-1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{-1}{7} + \dots \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{-2}{\sqrt{1}} \left[\text{---} \text{---} \text{---} \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{1}}{4} = \left[\text{---} \text{---} \text{---} \right] //$$

2.) Berechnen Sie $\hat{f}(t)$ für $f(x) = e^{-|x|}$

Lös: $\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} e^{-|x|} dx$ $e^{-itx} = \cos(tx) + i \sin(-tx)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} (\cos(tx) + i \sin(tx)) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \cos(tx) dx + i \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \sin(tx) dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} \cos(tx) dx \quad \text{---} \quad \text{---}$$

Partielle Int. $\Rightarrow \int_0^R e^{-x} \cos(tx) dx = -e^{-x} \cos(tx) \Big|_0^R - \int_0^R -(e^{-x}) \cdot t \sin(tx) dx$
 $\int f dg = fg - \int g df$ $f = \cos(tx)$
 $dg = e^{-x} dx$ $= -e^{-R} \cos(tR) + 1 - \text{---}$

$$\text{---} \Rightarrow \int_0^R e^{-x} t \sin(tx) dx = -e^{-x} t \sin(tx) \Big|_0^R - \int_0^R -e^{-x} t^2 \cos(tx) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^R e^{-x} \cos(tx) dx = -e^{-R} \cos(tR) + 1 + e^{-R} t \sin(tR) - t^2 \int_0^R e^{-x} \cos(tx) dx$$

$$\Leftrightarrow (1+t^2) \int_0^R e^{-x} \cos(tx) dx = -e^{-R} \cos(tR) + e^{-R} t \sin(tR) + 1$$

$$R \rightarrow \infty \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x} \cos(tx) dx = \frac{0 + 0 + 1}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\therefore \hat{f}(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

b) Was ist $f * f$?

Lös: $f * f = \hat{f} \cdot \hat{f} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(1+t^2)^2}$

$$\sqrt{\frac{4}{4}}$$