

Gleichgewichts^{punkte} und Stabilität

14.01.2025

U2-135

Erinnern: die Logistik-Gleichung ist $\dot{P} = \frac{dP}{dt} = rP \left(\frac{K-P}{K} \right)$ (*)

mit $P(t)$ = Bevölkerung bei Zeit t

K = Tragfähigkeit

r = Wachstumsrate

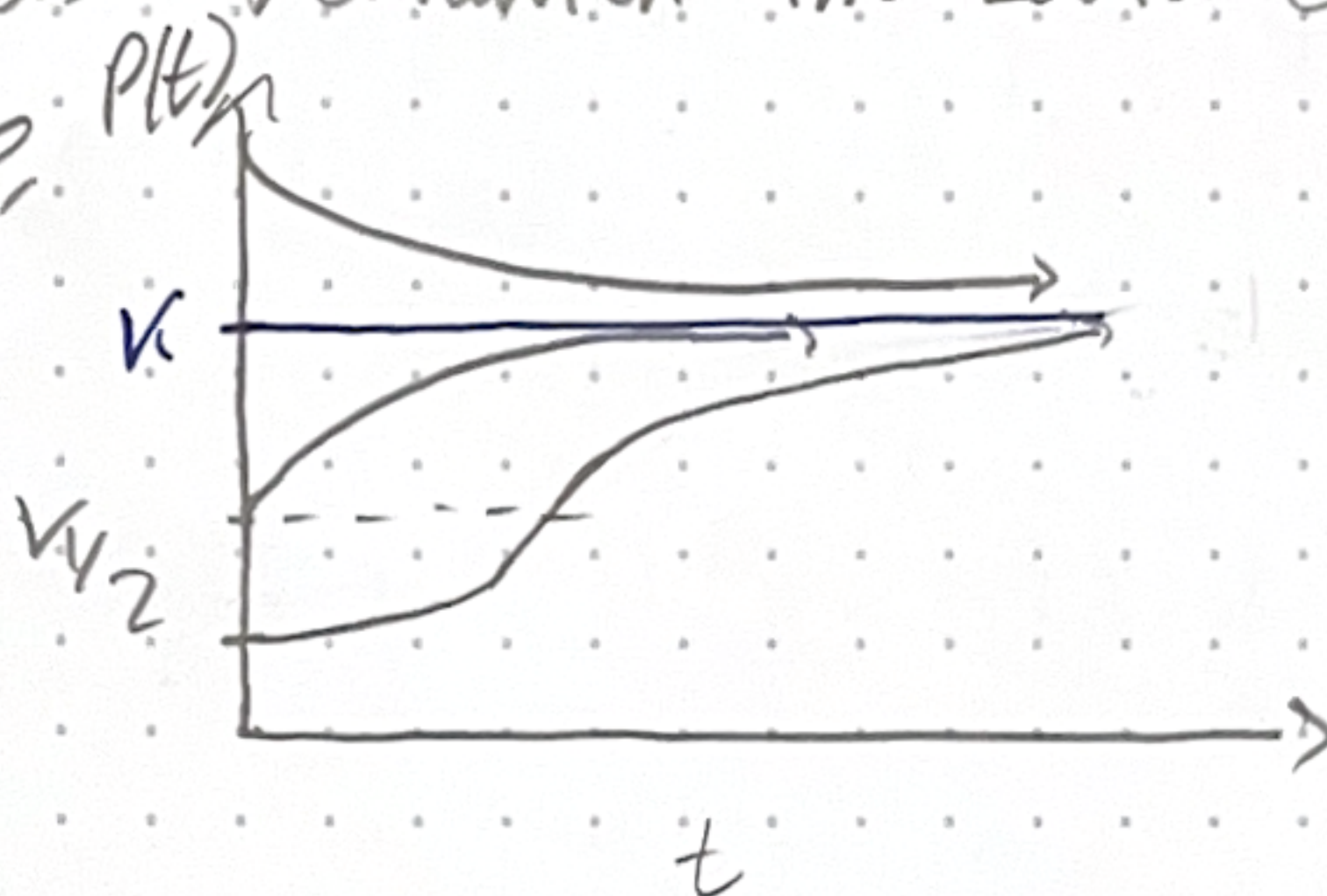
$P_0 = P(0)$

Anfangsbevölk.

Was ist das Verhalten im Laufe der Zeit? mit P ?

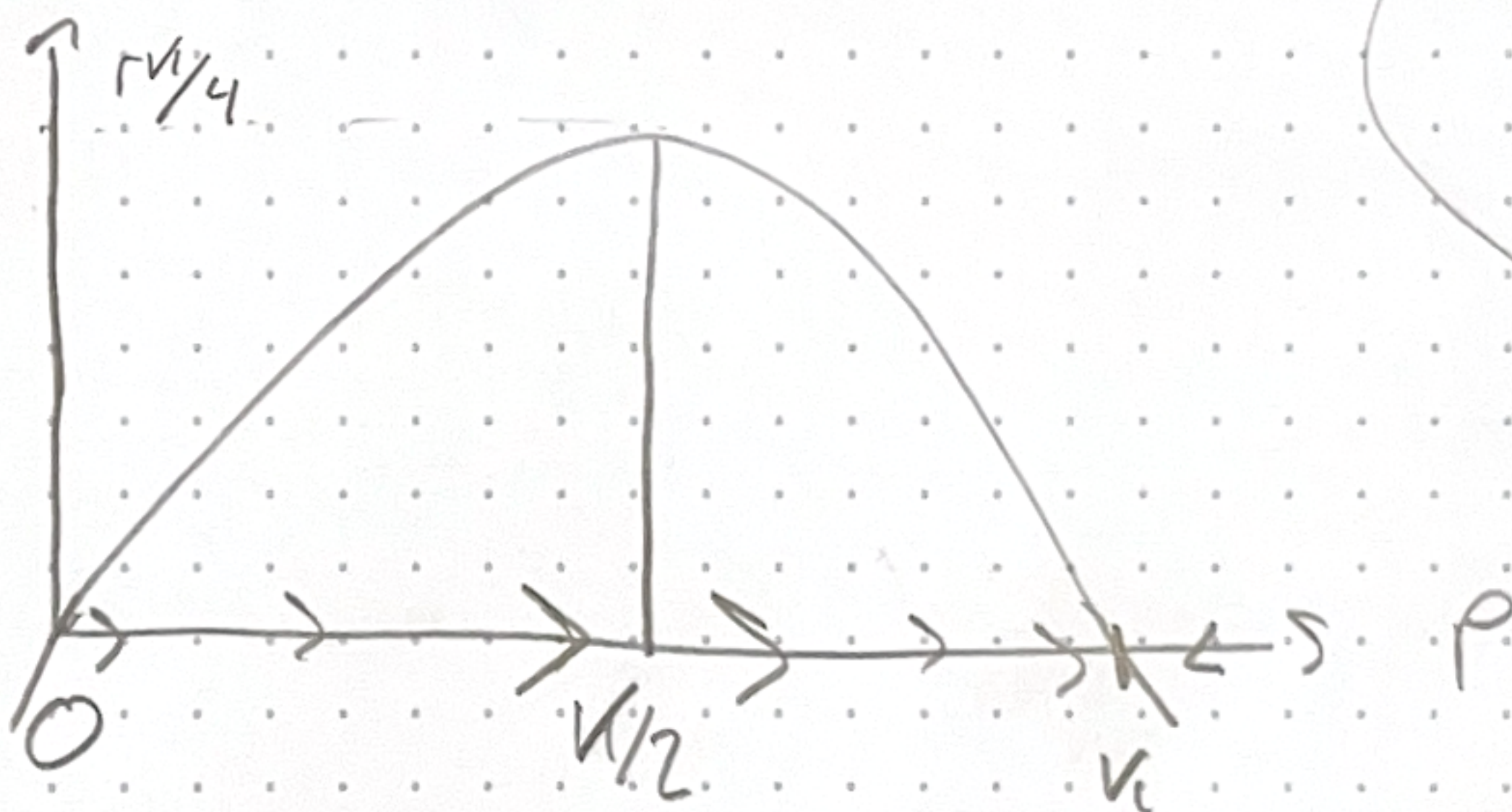
Als $t \rightarrow \infty$, $P(t)$

#2



Bilder folgt aus einer einfachen Analyse von P und $\dot{P}$

#1 Pfeile entsprechen $\dot{P}$ der "Geschwindigkeit" der Änderung von P



Lösung zu (*) $\Rightarrow P(t) = \frac{K C e^{rt}}{1 + C e^{rt}}$, mit C aus den Anfangsbedingungen.

Def! Ein Punkt $\bar{y}$ heißt ein Gleichgewichtspunkt für die DGL $\dot{y} = f(y)$ wenn $f(\bar{y}) = 0$

Bedeutung? keine Änderung oder Bewegung im System

Def! Ein Gleichgewichtspunkt $\bar{y}$ heißt

i) lokal-stabil (locally stable) wenn $\forall$ Umgebung U von $\bar{y}$,

$\exists U' \subseteq U$ s.d. $\forall y_0 \in U'$, $y(t) \in U \quad \forall t \geq 0$
 $y(t)$ Lösung zu $y(0) = y_0$

ii) Asymptotisch stabil wenn $\exists \varepsilon > 0$ sd $\forall y_0 \in U_\varepsilon(\bar{y})$,
 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \bar{y}$ (natürlich, asymp. stabil $\Rightarrow$ lokal stabil)
 $\hookrightarrow$ "Attraktor"

$\rightarrow$ Asymp. stabil denn heißt Neutral stabil

$\rightarrow$ lokal stabil denn heißt instabil oder abstoßend

In $\mathbb{R}$, es genügt zu prüfen, $f'(\bar{x}) < 0 \Rightarrow$ Attraktor

$f'(\bar{x}) > 0 \Rightarrow$ abstoßend

Ex: $\dot{P}(t) = f(P) = rP \left(\frac{K-P}{K} \right)$

$f(P) = 0 \Leftrightarrow P = 0$ oder $P = K$

$\frac{df(P)}{dP} = \frac{r}{K} (P(K-P))' = \frac{r}{K} (PK - P^2)' = \frac{r}{K} (K - 2P)$

$\hookrightarrow f'(0) = r > 0$ und $f'(K) = \frac{r}{K} (K - 2K) = -r < 0$

$\hookrightarrow$ abstoßend

$\hookrightarrow$ attraktiv

Im Bilder:



lokal
stabil

Attraktiv



neutral



abstoßend

Dies kann man in höher Dimensionen tun, z.B.,
 die Räuber-Beute-Gleichungen (nächste Woche?)

Präsenzübung

a) Finden Sie die FR für $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

b) Zeigen Sie, dass $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

~~und $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$~~

Lös:

a) $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx$
 $= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{\pi}{2}$

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx$ ①

① $= \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = x \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} dx$

$= \frac{\pi \cdot 0}{0} - \frac{0 \cdot 0}{n} - \frac{1}{n} \left(-\frac{\cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} \right)$

$= 0 + \frac{1}{n^2} (\cos(n\pi) - 1) = \frac{1}{n^2} ((-1)^n - 1)$

$\hookrightarrow a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{-2}{\pi n^2} & n \text{ ungerade} \end{cases}$

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx$ ②

② $= x \left(-\frac{\cos(nx)}{n} \right) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx$

$= -\frac{\pi \cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n^2} \sin(nx) \Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi (-1)^n}{n}$

$\hookrightarrow b_n = \frac{1}{\pi} \cdot -\frac{\pi (-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{n} & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$

$$2) f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{-2}{\pi(1)^2} \cos(x) + \frac{-2}{\pi} \cdot \frac{1}{3^2} \cos(3x) + \frac{-2}{\pi} \cdot \frac{1}{5^2} \cos(5x) + \dots$$

$$+ \frac{1}{1} \sin(x) + \frac{-1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{-1}{4} \sin(4x) + \dots$$

$$b) \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{-1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{-1}{7} + \dots$$

Lös: Wir wollen x sd. $\cos(nx) = 0$ $\forall n$ ungerade

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$2) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{-2}{\pi} [0 + 0 + 0 + \dots]$$

$$+ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin(\pi) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{-1}{4} \sin\left(\frac{4\pi}{2}\right)$$

$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ =0 & =0 & -1 & =0 \end{matrix}$

$$= \frac{\pi}{4} + 1 + \frac{-1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{-1}{7} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = 1 - \dots$$

2.] Berechnen Sie die FT von $f(x) = e^{-ax^2}$

Lös: $\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} e^{-itx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(ax^2 + itx)} dx$

$$[ax^2 + itx = a(x^2 + \frac{it}{a}x) = a(x^2 + \frac{it}{a}x + (\frac{it}{2a})^2 - (\frac{it}{2a})^2) = a(x + \frac{it}{2a})^2 + \frac{t^2}{4a}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x + \frac{it}{2a})^2 + \frac{t^2}{4a}} dx = \frac{e^{-\frac{t^2}{4a}}}{\sqrt{2\pi i}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a(x + \frac{it}{2a})^2} dx \quad u = x + \frac{it}{2a} \quad du = dx$$

$$= \frac{e^{-\frac{t^2}{4a}}}{\sqrt{2\pi i}} \int_{\mathbb{R}} e^{-au^2} du = \frac{e^{-\frac{t^2}{4a}}}{\sqrt{2\pi i}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Ein Standard Integral.

↳ Hint