

Markov-Ketten

21.01.2025
U2-135

Wir arbeiten mit diskreter Zeit $\{t_i\}_{i \geq 0}$

Def: Eine Folge von Zufallsvariablen, mit Werten in einer endlichen Menge E , heißt eine Markov-Kette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix

$$P = (P_{xy})_{x,y \in E} \quad \text{wenn}$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P_{x_n x_{n+1}}$$

↳ "Markov-Eigenschaft" oder Gedächtnisverlust

Eine Kette kann als Graph und Matrizen geschrieben werden.

Def: Eine Matrix $M \in M_n(\mathbb{R})$ heißt eine Markov-Matrix wenn

i) $M_{ij} \geq 0 \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$

ii) $\sum_j M_{ij} = 1$ — " —

Wir haben drei Klassen

a) irreduzibel: $\forall i, j \exists m \in \mathbb{N}, (M^m)_{ij} > 0$

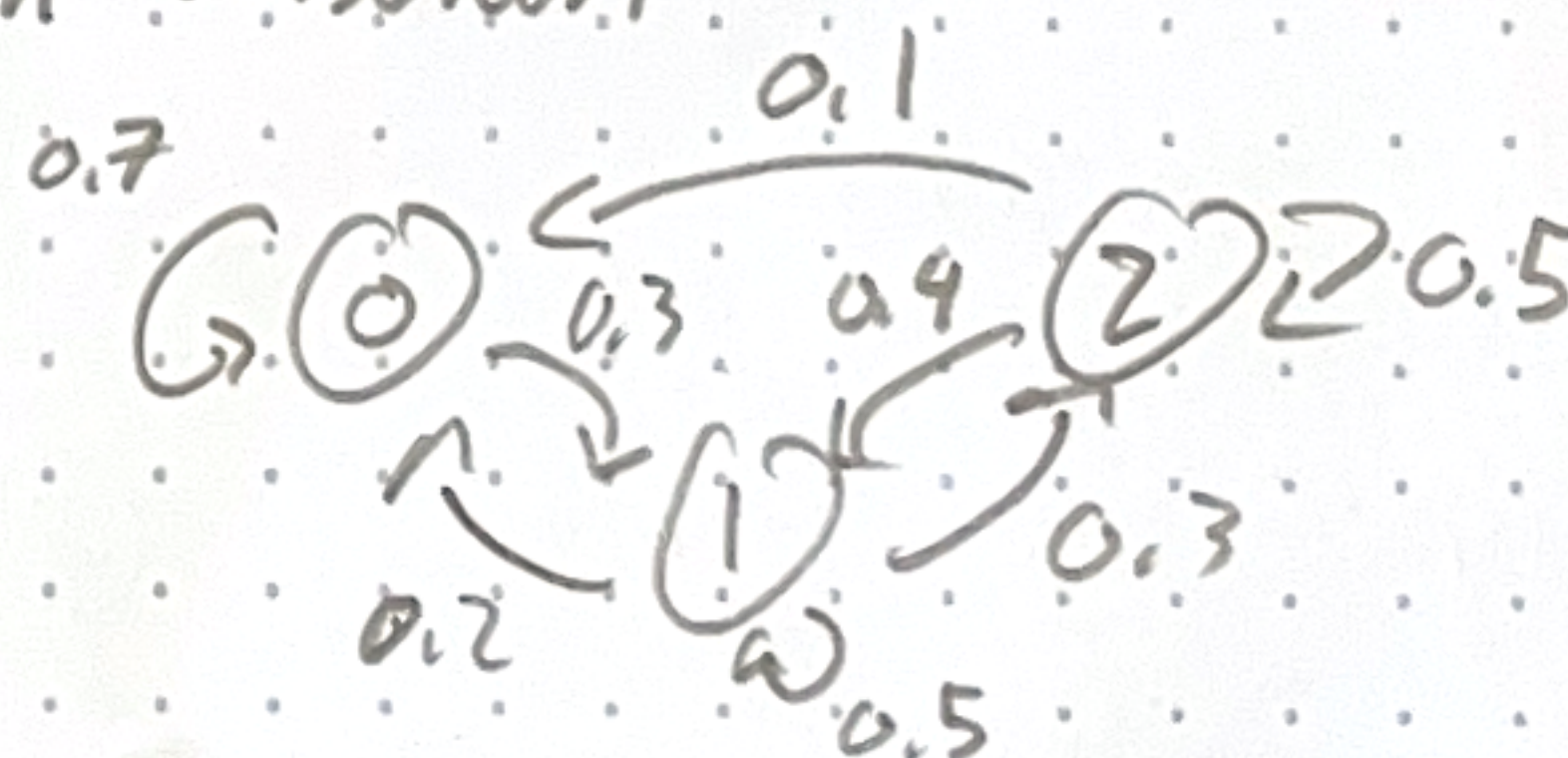
b) primitiv: $\exists m: \forall i, j: (M^m)_{ij} > 0$

c) aperiodisch: $\text{ggT}(\text{Zyklus-Längen in } G_M) = 1$

① primitiv $\Leftrightarrow$ irreduz. + aperiod.

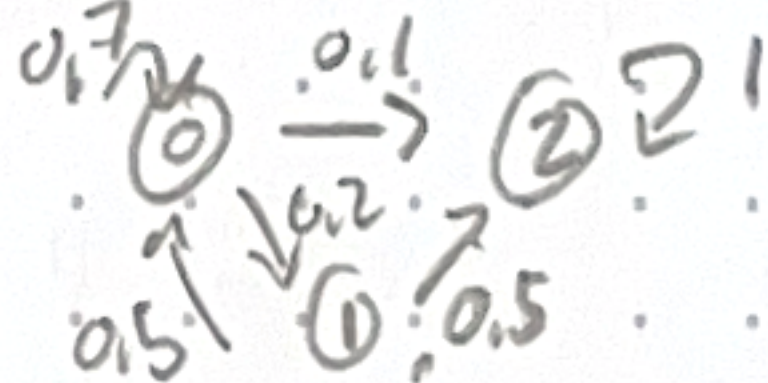
Wir zeigen wie die Eigenschaften aussehen

a) irred. $M = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$



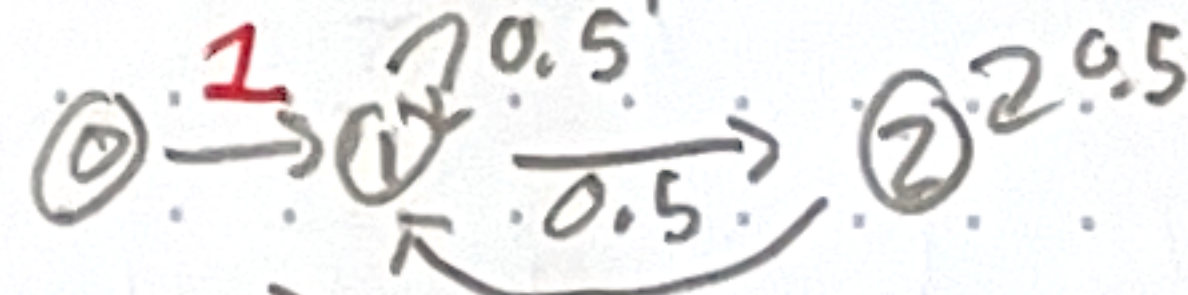
Reduzibel: $\exists$ einen Zustand, der absorbierend oder abstoßend ist

absorbierend:



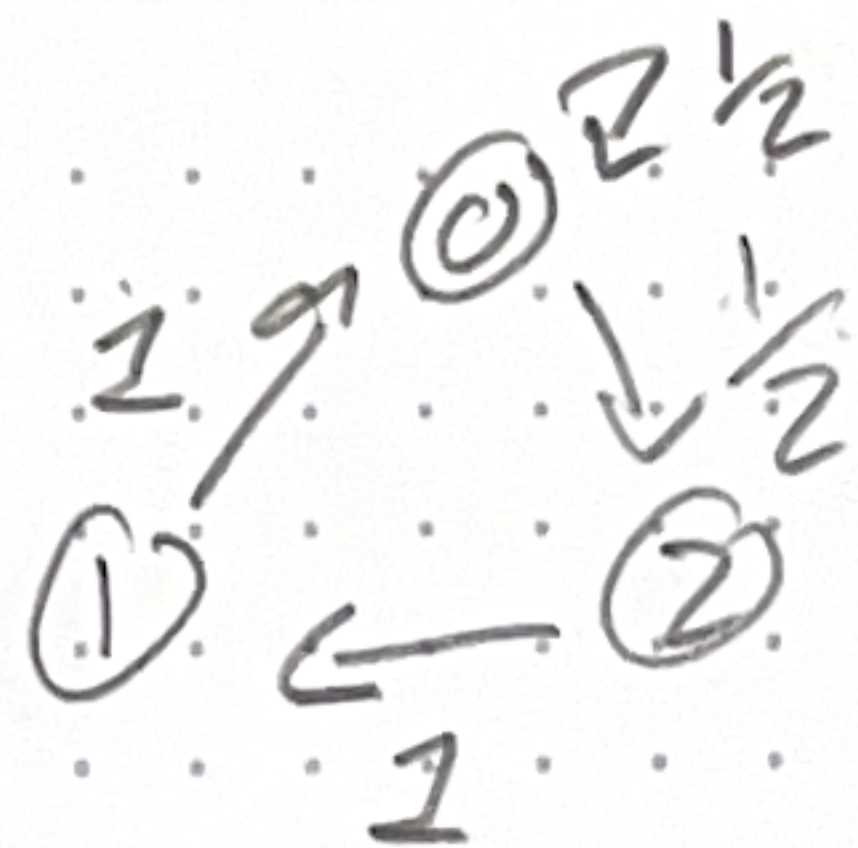
$$M = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

abstoßend:



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

c) aperiodisch



$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mindestens = 3, oder $3+n, n \geq 1$

Zykel-Länge $i \rightarrow i \geq 3$
 $i \in \{0, 1, 2\}$

$$1 \rightarrow 0 \rightarrow 0 = 1$$

Inbesondere $\exists \text{ ggT}(1, 3) = 1 \Rightarrow$ aperiodisch

Wir sagen der Zustand 0 ist aperiodisch.

Natürlich, für 1, 2, auch aperiodisch (z.B. $\text{ggT}(3, 3+n) = 1$)



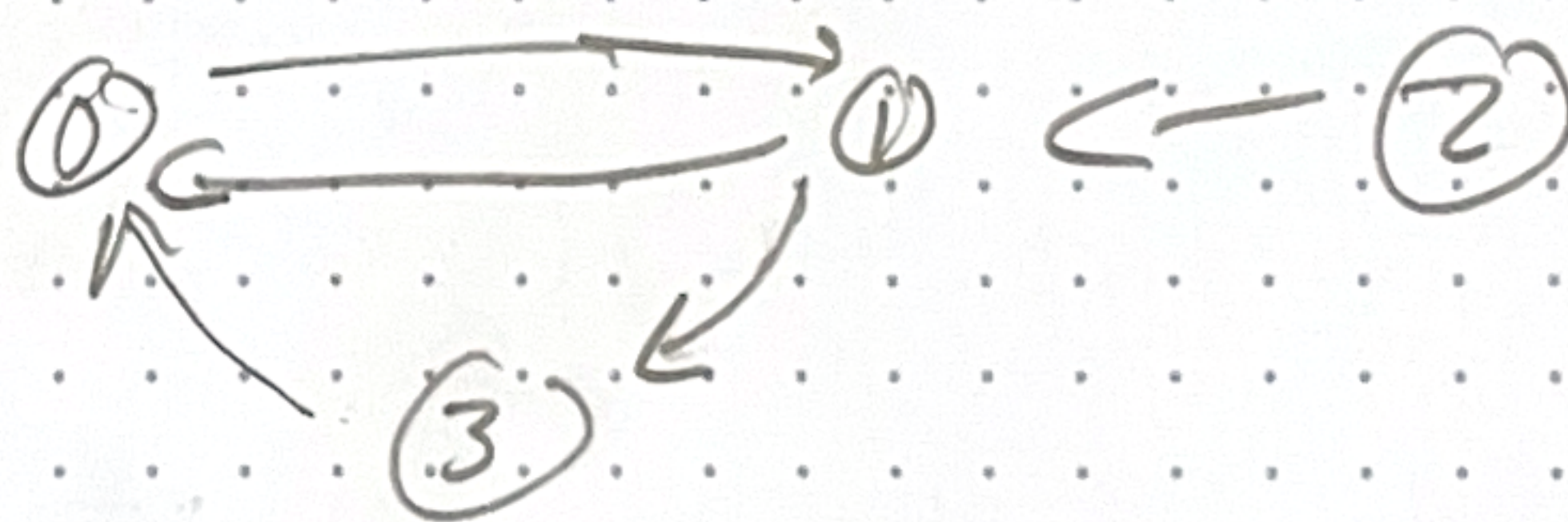
Beispiele:

i) period 3 + reduzierbar:

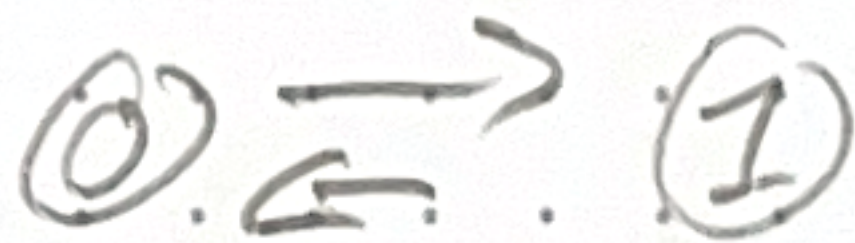


$$\text{period}(0) = \text{ggT}(\{3, 6, 9, \dots\}) = 3$$

ii) aperiodisch + reduz.



iii) irred. + periodisch



iv) Primitiv $\Leftrightarrow$ aperi + irred.



$$\text{period}(0) = \text{ggT}(\{2, 3, 4, 5, \dots\}) = 1 = \text{period}(1)$$

Notiz: ① impliziert, dass wenn $\exists$ eine Schleife und
 irreduz. $\Rightarrow$ aperiodisch.

Prüfungsübung:

1) Berechnen Sie die FR von $f(x) = x^2$ auf $[-\pi, \pi]$ (2 π -period.)

Lös: $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{-\pi^3}{3} \right) = \frac{2\pi^3}{3\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \frac{\sin(nx)}{n} dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[0 - \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx \right]$$

①

$$\textcircled{1} = x \cdot \frac{-\cos(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos(nx)}{n} dx$$

$$= \frac{\pi (-1)^{n+1}}{n} + \frac{\pi (-1)^{n+1}}{n} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = 0$$

$$= \frac{2\pi (-1)^{n+1}}{n}$$

$$\hookrightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-2}{n} \cdot \frac{2\pi (-1)^{n+1}}{n} = \frac{4(-1)^n}{n^2} = \begin{cases} \frac{4}{n^2} & n \text{ gerade} \\ -\frac{4}{n^2} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overset{\substack{\uparrow \\ \text{gerade}}}{x^2} \overset{\substack{\uparrow \\ \text{ungerade}}}{\sin(nx)} dx = 0$$

$$\hookrightarrow f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \geq 1} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

◻

2) Berechnen Sie die FT von $f(x) = \begin{cases} 1 - 2|x| & |x| \leq 1/2 \\ 0 & \text{andere} \end{cases}$

Lös: $f(x) = h(x) + h(-x)$ mit $h(x) = \begin{cases} 1 - 2x & x \leq 1/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Dann: $\hat{f}(x) = \hat{h}(x) + \hat{h}(-x)$

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (1-2x) e^{-ixt} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ixt} dx + \frac{-2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-ixt} dx$$

$$\textcircled{1} \int_0^{1/2} e^{-ixt} dx = \left. \frac{e^{-ixt}}{-it} \right|_0^{1/2} = \frac{1}{-it} (e^{-it/2} - 1) = \frac{i}{t} (e^{-it/2} - 1)$$

$$(2) \frac{ix e^{-ixt}}{t} \Big|_0^{1/2} - \frac{i}{t} \int_0^{1/2} e^{-ixt} dx$$

$$= \frac{i e^{-\frac{1}{2}}}{2t} - 0 + \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t} (e^{-\frac{1}{2}} - 1)$$

$$= \frac{1 \cdot e^{-it/2}}{2t} + \frac{e^{it/2} - 1}{t^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{21}} \cdot (\textcircled{1} + -2 \cdot \textcircled{2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\cancel{\frac{i}{t} e^{-it/2}} + \frac{-i}{t} + \cancel{\frac{-1}{t} e^{-it/2}} + \cancel{\frac{-2}{t^2} e^{-it/2}} + 2 \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-it + -2e^{-it/2} + 2}{t^2} \right) = \hat{h}(t)$$

$$1. \quad \hat{h}(t) + \hat{h}(-t) = \frac{-it + -2e^{-it/2} + 2}{t^2} + \frac{it + -2e^{it/2} + 2}{t^2}$$

$$= \frac{4 - 2(e^{it/2} + e^{-it/2})}{t^2} = \frac{4 - 4\cos(t/2)}{t^2} \quad \checkmark \quad 1 - \cos(2x) = 2\sin^2(x) = \frac{8\sin^2(t/4)}{t^2}$$

$$= \frac{\sin^2(\pi/4)}{(\pi/4)^2} = \frac{\sin^2(\pi/4)}{2}$$