Einbettbarkeit von Markov-Matrizen

28.01.2025
U2-135

<u>Def</u> (7.14) Eine Markov-Matrix heißt <u>einbettbar</u>, wenn es einen Markov-Generator Q gibt, so dass $M = e^{Q}$ gibt.

<u>Q</u>: Wann ist eine Matrix einbettbar?

Im allgemeinen Fall es ist eine sehr schwierige Frage. (und ein aktives Forschungsgebiet!)
Aber, wir haben ein paar Ergebnisse.

<u>Satz 7.16 (Kendall)</u>
Die Markov-Matrix $M = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$ ist genau dann einbettbar, wenn $\alpha, \beta \geq 0$ gilt zusammen mit $\alpha + \beta < 1$.
In diesem Fall, $\exists!$ Markov-Generator A mit $M = e^{A}$, nämlich $A = \log(1 + (M - 1))$.

<u>Idee von Beweis</u>: Logarithmusfunktion für Matrizen.

Eine einfachere Frage ist, wenn eine reelle Matrix M hat reellen Log., d.h. $M = e^{R}$, R reell gilt.

<u>Satz 7.25 (Culver)</u> Für $S \in GL(n,\mathbb{R})$, $S = e^{R}$ hat Lösung $R \in Mat(n,\mathbb{R})$ genau dann wenn jeder elementare Jordan-Block zu einem negativen Eigenwert von S, in der komplexen Jordan-Normalform von S, geradzahlig oft vorkommt.
(S diagonalisierbar, vereinfacht sich dies zu der Bedingung, dass jeder negative E.W. von S gerade algebraische Vielfachheit besitzen muss.)

Dieses Satz gibt die folgenden.

Satz 7.29: Sei M eine zyklische Markov-Mat. mit reellem Spektrum. Dann besitzt M genau dann einen reellen Logarithmus, wenn alle E.w. von M positiv sind. In diesem Fall, $M = e^R$, ist R eindeutig, und erfüllt $R \in alg(A)$ mit $A = M - 1$.

Erinnern Sie: zyklisch $\Leftrightarrow \exists\, u \in \mathbb{R}^n$ s.d. $\{u, Mu, M^2u, \dots M^{n-1}u\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist.

$alg(A) := \langle A^m \mid m \in \mathbb{N} \rangle_{\mathbb{R}}$

Folgerung: Sei M wie im vorigen Satz, mit positiven Eigenwerten. Dann ist die reelle Matrix $R = \log(1 + A)$ der einzige Kandidat für die Einbettbarkeit von M.

Bsp: $n=4 \Rightarrow$ die möglichen Fälle inzwischen komplett studiert.

$n>4 \Rightarrow$ offene Fragen.

Für allgemeine Markov-Matrizen.

Lemma 7.21: $n=2 \Rightarrow M$ 2×2 Markov-Matrix mit $\varrho(M-1) < 1$. Dann $\exists\, B \in Mat(n, \mathbb{R})$ s.d. $M = e^B$, $\sum_j B_{ij} = 0$, und eine Markov-generator.

Spektral-radius $= \max_{\lambda \in \sigma(M-1)} |\lambda|$

28.01.2025
U2-135

Präsenzübung

1) a) Berechnen Sie die FR von $f(x) = e^x$ an $[-\pi, \pi]$ (2π-periodisch)

Lös: $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \, dx = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \rightsquigarrow \frac{a_0}{2} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}$

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(nx) \, dx$

$= \frac{1}{\pi} \left[e^x \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} - -n \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(nx) \, dx \right]$

$= \frac{1}{\pi} \left[e^{\pi}(-1)^n - e^{-\pi}(-1)^n + n \left[\underbrace{e^x \sin(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) e^x \, dx \right] \right]$

$\circledast \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(nx) \, dx = (e^{\pi} - e^{-\pi})(-1)^n + -n^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(nx) \, dx$

$\Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(nx) \, dx = \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})(-1)^n}{1+n^2}$

$\rightsquigarrow a_n = \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi}) \cdot (-1)^n}{\pi (1+n^2)}$

$b_n = \frac{1}{\pi} \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(nx) \, dx}^{①}$

$① = e^x \sin(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} - n \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(nx) \, dx$

$= 0 + -n \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(nx) \, dx$

$= -n \left[e^x \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) e^x \, dx \right]$

$\Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(nx) \, dx = -n(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi}) + n^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(nx) \, dx$

$\rightsquigarrow b_n = \frac{-n(-1)^n e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)}$

$f(x) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)} \cos(nx) + \frac{-n(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)} \sin(nx)$ ◇

BRUNNEN

b) Zeigen Sie, dass $\frac{\pi}{e^{\pi}-e^{-\pi}} - \frac{1}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$

Lös: Sei $x=0$

$\Rightarrow e^0 = 1 = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)}$

$\Leftrightarrow 1 = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{1+n^2}\right]$ $\square$

2) Berechnen Sie e^{At} für die Folgenden

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Lös: $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$, mit

$e^{At} = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n\geq 0} \frac{(2t)^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n\geq 0} \frac{(t3)^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lös: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit

$(*)\ \sum_{n\geq 0} \frac{2nt^n}{n!} = 2t \sum_{n\geq 1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

$= 2t \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{(n-1)!} = 2te^t$

$e^{At} = \begin{pmatrix} \sum_{n\geq 0} t^n/n! & \sum_{n\geq 0}^{(*)} \frac{2nt^n}{n!} \\ 0 & \sum_{n\geq 0} t^n/n! \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ Wir benutzen (3e) aus Übungsblatt 12. C diagonal. $(C = SDS^{-1}) \Rightarrow e^C = S e^D S^{-1}$

Lös: $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda) + 5$
$= 5 - 5\lambda - \lambda + \lambda^2 + 5$
$= \lambda^2 - 6\lambda + 10 = (\lambda - 3)^2 + 1$

eigenwerte: $(\lambda - 3)^2 = -1 \Leftrightarrow \lambda - 3 = \pm i$
$\Leftrightarrow \lambda = 3 \pm i$

$3-i$ EV: $\begin{pmatrix} 2+i & -1 \\ 5 & -2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \overset{R_2 = -(2+i)R_1}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 2+i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ $(2+i) v_1 = v_2$

$\Leftrightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$; $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 3+i$ ⤳ diagonalisierbar

⤳ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2-i & 2+i \end{pmatrix} \Rightarrow D = B^{-1} A B = \begin{pmatrix} 3+i & 0 \\ 0 & 3-i \end{pmatrix}$

$\therefore e^{tA} = B e^D B^{-1}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2-i & 2+i \end{pmatrix} e^{3t} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 2+i & -1 \\ i-2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{e^{3t}}{2i} \begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ (2-i)e^{it} & (2+i)e^{-it} \end{pmatrix} \cdot$ —〃—

$= \frac{e^{3t}}{2i} \begin{pmatrix} (2+i)e^{it} + (i-2)e^{-it} & -e^{it} + e^{-it} \\ (2+i)(2-i)e^{it} + (i-2)(2+i)e^{-it} & -(2-i)e^{it} + (2+i)(e^{-it}) \end{pmatrix}$

$= \frac{e^{3t}}{2i} \begin{pmatrix} 2i\cos(t) + 4i\sin(t) & -2i\sin(t) \\ 10i\sin(t) & 2i\cos(t) - 4i\sin(t) \end{pmatrix}$

$= e^{3t} \begin{pmatrix} \cos(t) + 2\sin(t) & -\sin(t) \\ 5\sin(t) & \cos(t) - 2\sin(t) \end{pmatrix}$

BRUNNEN