22.10.2024
U2-135

Konvergenz

Def: $(z_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{C}$ Konvergiert zu $l = p+iq$ wenn $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, sd $\forall n \geq N$, $|z_n - l| < \varepsilon$

Notiz: $z_n = x_n + iy_n \xrightarrow{n\to\infty} l \iff x_n \xrightarrow{n\to\infty} p$ und $y_n \xrightarrow{n\to\infty} q$ (genau dann wenn)
$\hookrightarrow |x_n - p|^2 + |y_n - q|^2 = |z_n - l|^2$

Eigenschaften aus Konvergenz aus in $\mathbb{R}$ finden hier.

Def: i) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ Konvergiert zu $L \in \mathbb{C}$ wenn die Folge der Partialsummen $S_n := \sum_{k=1}^{n} z_k$ Konvergiert zu L.

Wie verher, $L = \sum_{n\geq 1} z_n \iff \sum_{n\geq 1} x_n = P \wedge \sum_{n\geq 1} y_n = Q$ mit $L = P + iQ$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ heißt absolut Konvergiert wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ Konvergiert ist.

Notiz: Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ Konvergiert ist, $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ aber nicht, dann sagen wir $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ bedingt Konvergent ist.

Inbesondere sind wir interressiert in Series von die Form $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $f_n : D \to \mathbb{C}$, D Interval $\subset \mathbb{R}$.

Def: $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ Konvergiert
i) punktweiße, wenn die Folge $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ Konversiert $\forall x \in D$.
ii) absolute, wenn $\sum_{n\geq 0} |f_n(x)|$ Konvergiert $\forall x \in D$
iii) gleichmäßige, wenn $S_n(x)$ gleichmäßige Konvergiert ist,

Erinnerung: $g_n : D \to \mathbb{R}$
i) $(g_n) \xrightarrow{n\to\infty} g$ punktweiße wenn $\forall x \in D, \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ sd $\forall n \geq N$, $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$
ii) $g_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ gleichmäßige $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in D, n \geq N$, $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$

Tests auf Konvergenz:

1) (Quotienten Kriterium) $\sum_{n\geq 1} z_n$, $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$

Wenn
- $r < 1 \to$ absolute konvergiert
- $r > 1 \to$ divergiert
- $r = 1$ or $\neg$ existiert $\to$ nicht schlüssig

2) (Leibniz Criterion) $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} a_n$, $a_n \geq 0$
und $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton abnehmend (decreasing) ist, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
dann die Serie konvergiert ist.

3) Absolut Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergiert

Weierstraß M-Kriterium

4) $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$. Wenn $\exists (M_n)_{n\geq 1}$, $M_i \in \mathbb{R}^+ \ \forall i$, sd
$|f_n(x)| \leq M_n \ \forall n \geq 1, \forall x \in D$, und $\sum_{n\geq 1} M_n$ konvergiert ist
dann $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ ist absolut und gleichmäßige konvergiert.

5) (Integral Kriterium) $f(n) = a_n$ positiv und monoton abnehmend Fktn.
Wenn $\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t f(x)\,dx < \infty$,
dann $\sum_{n\geq 1} a_n$ konvergiert ist.

Wenn $\int_1^\infty f(x)\,dx$ divergiert, so auch $\sum_{n\geq 1} a_n$

Q: Warum gleichmäßige Konvergenz?

A: Die Grenzwertfunktion behält Eigenschaften der Sequenzfunktionen bei.

Ex: $f_n(x) = x^n$ on $[0,1]$ (jeweils stetige)

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq x < 1,\ x^{n+1} \leq x^n \ \& \ \lim_{n\to\infty} x^n = 0 \\ x = 1,\ x^n = 1 \ \forall n \ \& \ \lim_{n\to\infty} x^n = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{punktweise}} f(x) = \begin{cases} 0 & \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

nicht stetige!

Präsenz Übung

Überprüfen Sie folgendes auf Konvergenz (punktweise, absolut, gleichmäßige) oder divergenz.

Null-Folge

1) $\sum_{n\geq 1} \frac{4n^2-n^3}{10+2n^3}$

Sol: $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{4n^2-n^3}{10+2n^3}}_{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{10+2n^3} + \lim_{n\to\infty} \frac{-n^3}{10+2n^3} = 0 + -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$\leadsto \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ divergiert

$H = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$
$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots$
$= \frac{1}{2} + H$

Notiz! $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ Konvergiert ! $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ divergiert

Leibniz

2) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Lös: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ mit $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ $\leadsto$ Leibniz

mit $\log(1+x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ $\leadsto$ $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \log(2)$

3) $\sum_{n\geq 2} \frac{e^{4n}}{(n-2)!}$

Ratio

Lös: $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{e^{4(n+1)}}{(n+1-2)!} \cdot \frac{(n-2)!}{e^{4n}} \right|$

$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{e^{4n+4}}{(n-1)!} \frac{(n-2)!}{e^{4n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{e^{4n+4}}{(n-1)(n-2)!} \frac{(n-2)!}{e^{4n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{e^4}{n-1} \right| = 0$

4) $\sum_{n\geq 1} \cos(\pi k) \frac{n}{e^n}$

Lös: $\sum_{n\geq 1} |\cos(\pi k)\, n e^{-n}| = \sum_{n\geq 1} n e^{-n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e} < 1$

$\leadsto$ Konvergiert
$\leadsto$ absolut Konv.

BRUNNEN

5) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-3}}{\sqrt{n}}$

Abs vs Condit.

Lös: $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{(-1)^{n-3}}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1/2}}$ divergeriert

$\rightarrow$ absolut ~~Konvergeriert~~ Konvergiert

Aber, mit Leibniz mit $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, ist konvergiert (bedingt)

6) $\sum_{n\geq 0} x^n$ an $(-1,1)$ und $(-r,r)$ mit $0 \leq r < 1$

punkt vs gleich.

Lös: $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ $\rightarrow$ $S_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-x}$

Als $\frac{1}{1-x}$ unbegrenzt ist, ~~nich~~ nicht gleichmäßige an $(-1,1)$

$\hookrightarrow$ punktweise

Aber, für $0 \leq r < 1$, $S_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-x}$ gleichmäßige.

Hausübung ?

7) $\sum_{n\geq 1} \frac{x}{(1+x)^n}$ an $[1,2]$

Weiers. M-Test

Lös: $\sup_{x\in[1,2]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[1,2]} \left|\frac{x}{(1+x)^n}\right| \leq \sup_{x\in[1,2]} \frac{x^n}{(1+x)^n} = \sup_{x\in[1,2]} \left(\frac{x}{1+x}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{=: M}$

mit $\sum_{n\geq 1} M_n$ Konvergiert geometrie Reihe

$\Rightarrow |f_n(x)| \leq M_n \quad \forall n \geq 1 \quad \forall x \in [1,2]$ mit $\sum_{n\geq 1} M_n$ Konv.

$\rightarrow$ Weierstraß $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{x}{(1+x)^n}$ ist absolut und gleichmäßig Konvergiert an $[1,2]$.