Austauschen von Operationen mit Integralen

29.10.2024
U2-135

Ⓣ1: Monoton Konvergenz Satz $D \subseteq \mathbb{R}$

Sei $f_n : D \to \mathbb{R}^+ \cup \infty$ eine Folge von integrierbare Funktionen, sd $0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \dots \quad \forall x \in D$ und $f_n \to f$ punktweiße

Dann,
$$\lim_{n\to\infty} \int_D f_n \, d\lambda = \int_D f \, d\lambda = \int_D \lim_{n\to\infty} f_n \, d\lambda$$

Notiz: Ⓣ1 impliziert, für $(f_n)_{n\ge1}$ nicht negative und integrierbare, von $D \to \mathbb{R}^+ \cup \infty$,

$$\int_D \sum_{n\ge1} f_n \, d\lambda = \sum_{n\ge1} \int_D f_n \, d\lambda$$

via $g_N := \sum_{n=1}^{N} f_n$

Ⓣ2: Majorisierten Konvergenz Satz (Dominated Convergence Theorem)

Sei $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Folge von integrierbare Funktionen, mit $f_n \to f$ punktweiße. Wenn $\exists$ g integrierbare sd $|f_n(x)| \le g(x) \; \forall n, x$, dann f integrierbare ist und

$$\int_D f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_D f_n \, d\lambda$$

Ⓣ3: (Fatou's Lemma)

Sei $f_n : D \to \mathbb{R} \cup \infty$ eine Folge von nicht negative und integrierbare Funktionen, Dann $\liminf_{n\to\infty} f$ ist integrierbare mit

$$\int_D \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\lambda \le \liminf_{n\to\infty} \int_D f_n \, d\lambda$$

"Integral of limiting function bounded by limit of original integrals"

① 4 (Liebnizregel für Parameterintegrale)

Sei $f(x,t)$ stetig mit stetiger partieller Ableitung (in t), und $a(x), b(x)$ stetig differenzierbar, und finite sind (in einigen Region R)

Dann, $\forall (x,t)$

$$\underbrace{\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\, dt}_{\frac{d}{dx} F(x)} = f(x, b(x)) \cdot \frac{d}{dx} b(x) - f(x, a(x)) \cdot \frac{d}{dx} a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\, dt$$

Wenn $a(x) = a$, $b(x) = b$ konstant ist, wir haben

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x,t)\, dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$$

Notiz: $f(x_1, \dots, x_n)$.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f(p)}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f(p)}{\partial x_i}\right)$$

für $p \in \mathbb{R}^n$ sd $\exists$ Umgebung von p sd f hat stetiger zweiter Ableitung.

① 5 (Satz von Fubini)

Sei $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{k+l})$, dann

$$\int_{\mathbb{R}^{k+l}} f(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\int_{\mathbb{R}^l} f(x,y)\, dy \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^l} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)\, dx \right) dy$$

Notiz: i) Wenn $f(x,y) = h(x) g(y)$, dann

$$\iint \underbrace{h(x)}_{\text{konstant}} g(y)\, dy\, dx = \int \underbrace{\left(\int g(y)\, dy \right)}_{\text{konstant}} h(x)\, dx$$

$$= \int g(y)\, dy \int h(x)\, dx$$

ii) Für einer Substitution $x = g(u,v)$, $h = l(u,v)$

$$\iint_R f(x,y)\, dx\, dy = \iint_G f(g(u,v), h(u,v))\, \underbrace{|J(u,v)|}_{\text{Jacobian}}\, du\, dv$$

mit $|J(u,v)| = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

Übung

1) Sei $(r_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Aufzählung der rationalen Zahlen in $[0,1]$, und $f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \{r_1, \dots, r_n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Berechnen $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$.

MCT

Lös: $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ w/ $f_1(x) \le f_2(x) \dots$

$$\int_0^1 1_{\mathbb{Q}}(x)\,d(x) = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{MKS}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

2) Sei $f: D \to \mathbb{R}^+ \cup \infty$ integrierbar.

Berechnen $\lim_{n\to\infty} \int_D n \log(1 + f(x)/n)\,dx$

Sol: $f_n(x) := n \log\left(1 + \frac{f(x)}{n}\right) = \log\left(1 + \frac{f(x)}{n}\right)^n$

MCT

nicht negativ und integ und mono annehmend (log annehmend)

Als $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \;\forall x \in \mathbb{R}$, wir haben

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\log\left(\left(1 + \frac{f(x)}{n}\right)^n\right)\right) = \log(e^{f(x)}) = f(x)$$

Danach, $\lim_{n\to\infty} \int_D \underbrace{n \log\left(1 + \frac{f(x)}{n}\right)}_{f_n} dx = \int f(x)\,dx.$

Series 3) $\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt$ mit Geometrie Reihe $\sum_{n\ge0} (-t)^n = 1/1+t$

Lös: $\log(1+x) = \int_0^x 1/1+t\,dt = \int_0^x \sum_{n\ge 0} (-t)^n\,dt$

$$= \int_0^{x} \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} (-t)^n\,dt$$

$$\overset{MCT}{=} \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \int_0^x (-t)^n\,dt$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{x(-x)^n}{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

$u = -t \quad du = -dt$

$\int (-t)^n\,dt = -\int u^n\,du$

$= -\frac{u^{n+1}}{n+1}$ ~~$\frac{t^{n+1}}{n+1}$~~

$= \frac{t(-t)^n}{n+1}$

BRUNNEN

4) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{n\sin(x/n)}{x(x^2+1)}\,dx$ DCT

Lös: $f_n(x) := \frac{n\sin(x/n)}{x(x^2+1)} = \frac{\sin(x/n)}{x/n} \cdot \frac{1}{x^2+1} = \operatorname{sinc}(x/n) \cdot \frac{1}{x^2+1}$

$f_n(x) \to \frac{1}{x^2+1}$ punktweise mit $g(x) := \frac{1}{x^2+1}$

$|f_n(x)| = |\operatorname{sinc}(x/n)| \cdot \frac{1}{x^2+1} \leq 1 \cdot \frac{1}{x^2+1} = g(x)$

Daher, $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{n\sin(x/n)}{x(x^2+1)}\,dx \overset{DCT}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}$

$= \pi.$

5) $\int_0^1 \frac{t^3-1}{\ln(t)}\,dt$ Leibniz

Lös: $\frac{d}{dx} t^x = t^x \ln(t)$ (Kettenregel mit $t^x = e^{x\cdot\log(t)}$)

$g(x) := \int_0^1 \frac{t^x-1}{\ln(t)}\,dt$ und mit Leibniz,

$g'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{t^x-1}{\ln(t)}\,dt \overset{Leibniz}{=} \int_0^1 \frac{t^x\ln(t)}{\ln(t)} = \frac{t^{x+1}}{x+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{x+1}$

$\Rightarrow g(x) = \ln|x+1| + c$ mit $g(0) = \int 0\,dt = 0$

$\Rightarrow \ln|1| + c = 0 \Rightarrow c = 0$

$\therefore g(3) = \int_0^1 \frac{t^3-1}{\ln(t)}\,dt = \ln|4|$

6) Wende Fatou's Lemma zu $f_n(x) = \begin{cases} 1_{(1,2]} & n \text{ gerade} \\ 1_{[0,1]} & n \text{ ungerade} \end{cases}$ Fatou

Lös: $\forall n, \int_0^2 f_n(x)\,dx = 1$ mit $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

$0 = \int_0^2 \liminf_{n\to\infty} f_n < \liminf_{n\to\infty} \int_0^2 f_n = 1$