# Hilbert-Räume (und Skalerprodukt)

12.11.2024
U2-135

**Def**: Eine Vector Raum H heißt einer Hilbert-Raum wenn es ein Skalerproduct hat und vollständig ist bezüglich der induzierten Norm.

D.h.: $\exists \langle \cdot,\cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ eine Skalerprodukt,
und Norm $\|x\|^2 := \langle x, x \rangle$

Wir gehen Skalerproduckte und Norms noch einmal im "Grundlagen"-Teil durch.

**Biespiele**:

i) $\mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

ii) $L^2(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\lambda < \infty \}$

mit $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} \, d\lambda(t)$

**Beweis nach (ii)**: zu lang für heute, siehe Online-Notizen.

Sketch:
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge $\in L^2$
- $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ Teilfolge s.d. $\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_2 < 2^{-j} \quad \forall j$
- $G_k := \sum_{j=1}^{k} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$ ; $G := \sum_{j \geq 1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$
- Minkowski + Majorisierten Kriterium $\Rightarrow \int G^2 \, d\lambda \leq 1$
- $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}} \xrightarrow{j \to \infty} f := \sum_{j \geq 1} f_{n_j}$ a.e. $\quad \hookrightarrow f_{n_1} + \sum_{j \geq 1} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j})$ a.e. Konvergiert
- $\|f_n - f\|_2 = \int |f_n - f|^2 \, d\lambda = \int \lim_{j \to \infty} |f_n - f_{n_j}|^2 \, d\lambda$

$\overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf \|f_n - f_{n_j}\|_2 \leq \varepsilon^2$

$\square$

(I) $L^2$, mit $\|f\|^2 := \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}\,dt$, Vollständig ist.

<u>Bew:</u> Klar, dass $\|\cdot\|$ eine Norm ist. Sei $\varepsilon > 0$.

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^2$, und weiter sei $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge s.d. $\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\| < 1/2^j \ \forall j$

Definiert

$$G_k := \sum_{j=1}^{k} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \text{ und } G := \lim_{k\to\infty} G_k$$

Nach Minkowski-Ungleichung,

$$\|G_k\| \leq \sum_{j=1}^{k} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Monotone Konvergenz Satz gibt

$$\int_{\mathbb{R}} G^2\, d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} G_k^2\, d\lambda \leq 1$$

Danach, $G \in L^2$ und $G(x) < \infty$ a.a $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f_{n_1} + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j})$ konvergiert a.e. zu $f$

$\Rightarrow |f| \leq G + |f_{n_1}|$ und so $f \in L^2$

und $$\lim_{j\to\infty} f_{n_j} = \lim_{j\to\infty} \left(f_{n_1} + \sum_{i=1}^{j-1} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i})\right) = f_{n_1} + G = f \quad \text{a.e.}$$

Für $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $\|f_n - f_m\|^2 \leq \varepsilon^2 \ \forall m, n \geq N$ (Cauchy-Fol)

Danach,

$$\|f_n - f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \lim_{j\to\infty} |f_n - f_{n_j}|^2\, dx \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f_{n_j}|^2\, d\lambda < \varepsilon^2$$

$\curvearrowright \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0 \Rightarrow L^2$ Vollständig $\square$

**Def:** Zwei Elemente $x, y \in H$ heißt <u>orthogonal</u>, wenn $\langle x, y \rangle = 0$.

Eine Teil Menge $S \subset H$ heißt <u>orthogonal</u> wenn, $x, y \in S,\ x \neq y \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0$

$S$ heißt <u>orthonormal</u> wenn $S$ orthogonal ist, und $\|x\| = 1 \quad \forall\ x \in S$.

<u>Bemerkung</u>: $S$ orthogonal $\Rightarrow \{ x/\|x\| \mid x \in S \setminus \{0\} \}$ orthonormal ist.

(T) Orthogonal Reduzierung

Sei $M$ geschlossener Teilraum von $H$. Denn $H = M \oplus M^\perp$,
d.h. $M^\perp = \{ x \in H \mid \langle x, y \rangle = 0,\ y \in M \}$

Übüng:

1) Bestimmen Sie, ob die folgenden Vollständig sind.

Not done in tutorial

a) $E = \{ (x_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{C} \mid$ nur endlicher nicht-null Terme $\}$

In bes: $x_n = (1, 1/2, 1/3, \dots 1/n, 0, 0, 0 \dots)$

mit $\langle (x_n), (x_m) \rangle = \sum_{k \geq 1} x_{n_k} x_{m_k}$

Lös: $(x_n)_{n \geq 1}$ Cauchy ist, als für $m > n$, $1/n > 1/m$, $\Rightarrow 1/n \dots 1/m$

$$\lim_{m,n \to \infty} \|x_m - x_n\| = \lim_{m,n \to \infty} \left( \sum_{k=n+1}^{m} 1/k^2 \right)^{1/2} = 0$$

$\Leftrightarrow (x_m - x_n) = (1, 1/2, \dots, 1/n, \dots 1/m, 0 \dots) - (1, 1/2, \dots 1/n, 0, \dots)$

Aber $\lim_{n \to \infty} x_n \notin E \Rightarrow \neg$ Vollständig

b) $C[0,1]$ Betrachten $f_n(x) = x^n$; $\|f\|^2 = \int_0^1 f(x)^2\, dx$

Lös: Cauchy: $\varepsilon > 0$, $m \geq n > N$, sd $1/N < \varepsilon^2$

$$\|f_n - f_m\|^2 = \int_0^1 x^n - x^m\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 - \frac{x^{m+1}}{m+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{\varepsilon^2}$$

Aber $f_n(x) \to \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x \in [0,1) \end{cases} \notin C[0,1] \Rightarrow \neg$ Vollständig

## 2) Übung:

$\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) = \{$stetigen und $2\pi$-periodischen Funktionen$\}$

mit $\langle f|g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$

Zeigen Sie, dass

$S := \{1\} \cup \{\sqrt{2}\cos(nx) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\sqrt{2}\sin(xn) \mid n \in \mathbb{N}\}$

ein Orthonormal system (ONS) ist, d.h. $\forall f,g \in S, f \neq g,$

$\langle f|f\rangle = 1$ und $\langle f|g\rangle = 0$

<u>Lös</u>: Wir haben, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\, dx = 2\frac{\sin(\pi n)}{n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)dx = 0$ (ungerade funktion über Symmetrisches Intervall)

$\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\cos(nx)\sin(nx)}_{\text{ungerade}} = 0$ —— " ——

Jetzt, für $m \neq n$ $\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\, dx$ analog ist.

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x(m+n)) + \cos(x(m-n))\, dx$

$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x(m+n))\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x(m-n))\, dx$

$= \frac{1}{2}\frac{\sin(x(m+n))}{m+n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\frac{\sin(x(m-n))}{m-n}\Big|_{-\pi}^{\pi}$

$= \frac{\sin(\pi(m+n))}{m+n} + \frac{\sin(\pi(m-n))}{m-n} = 0 \quad \forall m \neq n \in \mathbb{N}$

Für $m = n \Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos(2nx)}{2}dx$

$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(2\pi n)}{2n} + \pi\right] = 1$

3/5

Not
den

BRUNNEN

# Skalarprodukts und Norms $E$ CVR

**Def:** $\langle \cdot,\cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$ heißt an Skaler produkt wenn

i) $\langle x,x \rangle \geq 0$, $\langle x,x \rangle = 0 \iff x = 0$

ii) $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$

iii) $\langle x, y+z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$

iv) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow E$ heißt eine Prä-Hilbertraum

**Biespiel:** Von vorher

**(T) Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**

$\forall x,y \in E$, wir haben $|\langle x,y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

**Bew:** Präsenz Übung

$\geq 0$, $= 0 \iff x = 0$

$f(\alpha x) = |\alpha| f(x)$

$\Delta$-ungleichung

$\|\cdot\|^2 = \langle \cdot,\cdot \rangle$

**Bem:** Jeder Skalerproduct induziert eine Norm, aber der umgekehrte Fall ist nicht der Fall! **Bew:** Hausübung

Z.B: $L^p$ norm, $p > 2$

**(T) Parallelogram Regel** $\forall x,y \in E$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

↳ gilt nicht für $L^p$ norm $(p>2)$

Not done

**Bem:** Man sieht das Skalerprodukt in $\mathbb{R}^n$ oft definiert als

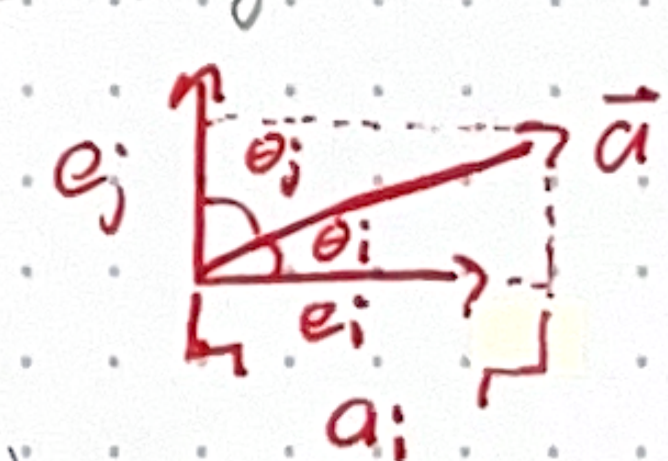
$a \cdot b = a_b \|b\| = \|a\| \|b\| \cos(\theta)$. Wir zeigen die Äquivalence.

**Bew:** Sei $\{e_i\}_{i=1}^n$ eine Orthonormal Basis von $\mathbb{R}^n$. $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i$

$\Rightarrow e_i \cdot e_j = \|e_i\| \cdot \|e_j\| \cdot \cos(\pi/2) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} = \delta_{ij}$ Kronecker $\delta$

$\Rightarrow a \cdot e_i = \|a\| \cdot \underbrace{\|e_i\|}_{1} \cos(\theta_i) = a_i$

↑ angle of $a$




$\Rightarrow a \cdot b = a \cdot \sum_{i=1}^n b_i e_i = \sum_{i=1}^n b_i (a \cdot e_i) = \sum_{i=1}^n b_i a_i$

$= \sum_{i=1}^n b_i a_i \quad \square$

$[a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c]$



BRUNNEN

## Präsenz Übung:

1) Zeigen Sie, dass $\langle x,y\rangle = 5x_1y_1 + 8x_2y_2 - 6x_1y_2 - 6x_2y_1$, $x,y \in \mathbb{R}^2$ eine Skalarprodukt ist

**Lös:** ii) Klar, iv) Klar

iii) $\langle x, y+z\rangle = 5x_1(y_1+z_1) + 8(x_2(y_2+z_2)) - 6x_1(y_2+z_2) - 6x_2(y_1+z_1)$

$= 5x_1y_1 + 5x_1z_1 + 8x_2y_2 + 8x_2z_2 - 6x_1y_2 - 6x_1z_2 - 6x_2y_1 + -6x_2z_1$

$= \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$

i) $\langle x,x\rangle = 5x_1^2 + 8x_2^2 - 12x_1x_2$

$= (x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2) + (4x_1^2 - 8x_1x_2 + 4x_2^2)$

$= (x_1 - 2x_1x_2)^2 + (2x_1 - 2x_2)^2 \geq 0$

$\Rightarrow \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x_1 - 2x_2 = 0$ und $2x_1 - 2x_2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 2x_2$ und $2x_1 = 2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 = x_2$

$\square$

2) Beweisen Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (in $\mathbb{R}^n$)

**Lös:** Fall 1) $\|x\| = \|y\| = 1$ zu zeigen $\Rightarrow \langle x,y\rangle \leq 1$

$\|x-y\|^2 \geq 0 \Rightarrow \langle x-y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle - 2\langle x,y\rangle \geq 0$

$\Leftrightarrow 2 - 2\langle x,y\rangle \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \langle x,y\rangle$

Fall 2) $x = 0$ or $y = 0 \Rightarrow$ Klar

Fall 3) $x \neq 0$ und $y \neq 0 \Rightarrow \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \overset{\text{(Fall 1)}}{\leq} 1 \Rightarrow \langle x,y\rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$

und mit $y \mapsto -y$: $\langle x,-y\rangle \leq \|x\| \cdot \|-y\|$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \geq -\|x\|\|y\|$

not done

3) Finden Sie den Winkel zwischen $(1,2,-1)$ und $(2,1,4)$

**Lös:** $\|(1,2,-1)\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$ ; $\|(2,1,4)\| = \sqrt{2^2+1^2+4^2} = \sqrt{21}$

$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\langle (1,2,-1),(2,1,4)\rangle}{\sqrt{6}\sqrt{21}} = \frac{2+2+-4}{\sqrt{6}\sqrt{21}} = 0$

in Allgemeinen $\Rightarrow \cos(\theta) = \alpha \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(\alpha)$

5/5