

Gewöhnliche Differentialgleichungen

19.11.2024
U2-135

Def: Eine ^(Gewöhnliche) DGL ist eine Beziehung zwischen einer unbekannten Funktion ^{von einer Variable} und ihren Ableitungen.

- Der Ordn von eine DGL ist die höchstens Ableitung.
- Eine DGL heißt linear wenn es die Form hat

$$a_n(x) y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x) y(x) = f(x)$$

Wenn $f(x) \equiv 0$, nennt man die DGL homogen.

Beispiel: $y' = a y(t)$ ist eine 1-Ordnung, linear, DGL mit Lösung

$$y'(t) = a y(t) \Leftrightarrow \int \frac{\frac{dy(t)}{dt}}{y(t)} dt = \int a dt$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{u} du = at + C \Leftrightarrow \ln |y(t)| = \ln |u| = at + C$$

$$y(t) = e^{at} \cdot \frac{e^C}{C} \quad \text{② } u = y(t) \quad du = \frac{dy}{dt} dt$$

Bem: Eine Partielle DGL hat ≥ 2 Variable

Wenn eine DGL nicht-linear ist, heißt es nicht-linear.
z.B.: $y' = y^2$ und $yy' = -1$ nicht-linear sind.

2-Ordnung Homogene DGL mit konstanten Koeffizienten

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{Charakteristische Gleichung.}$$

$$y \mapsto e^{rt} \Rightarrow (ar^2 + br + c)e^{rt} = 0 \Leftrightarrow r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fall 1) $r_1 \neq r_2$ ($b^2 - 4ac > 0$) $\Rightarrow e^{r_1 t}, e^{r_2 t}$ sind beide Lösungen.

② See Note 1 2) $r_1 = r_2$ ($b^2 = 4ac$) $\Rightarrow C_1 e^{r_1 t} + C_2 t e^{r_1 t}$ General Lösung ②

$$3) b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = -\alpha \pm i\beta$$

$$\Rightarrow e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} \cdot (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) \\ = e^{\alpha t} \cos \beta t + i e^{\alpha t} \sin \beta t =: u(t) + i v(t)$$

$$\Rightarrow a(u+iv)'' + b(u+iv)' + c(u+iv) = 0$$

$$\Leftrightarrow au'' + iav'' + bu' + ibv' + cu + civ = 0$$

$$\Leftrightarrow (au'' + bu' + cu) + i(av'' + bv' + cv) = 0$$

Daher, beide Term gleich 0 sind

$$\Rightarrow u = e^{\alpha t} \cos \beta t \text{ und } v = e^{\alpha t} \sin \beta t \text{ Lösungen sind}$$

Allgemein, man kann zeigen dass wenn y_1 und y_2 linear unabhängig Lösung sind (überprüft mit der Wronskian)

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad \rightarrow \text{Beweis: Lehrbuch}$$

auch sind eine Lösung.

Beispiel: $y'' + 16y = 0$, $y(\pi/2) = -10$, $y'(\pi/2) = 3$

Lösung: $r^2 + 16 = 0 \Rightarrow r = \pm 4i = 0 \pm 4i$ $\alpha = 0, \beta = 4$

$$y = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$$

$$y' = -4c_1 \sin(4t) + 4c_2 \cos(4t)$$

$$-10 = y(\pi/2) = c_1 \cos(2\pi) + c_2 \sin(2\pi) = c_1$$

$$3 = y'(\pi/2) = -4c_1 \cdot 0 + 4c_2 \cdot 1 \Rightarrow c_2 = 3/4$$

$$\Rightarrow y = -10 \cos(4t) + 3/4 \sin(4t)$$

Der Fall von non-homogeneous DGL ist schwieriger, $\Rightarrow$ einen

DGL-Lehrbuch für Methoden. Wir benutzen die Fourier-Transform.

Es "macht" eine Differential Gleichung zu eine algebraische Gleichung.

(Satz 4.5) (in $\mathbb{R}^n$)

$$\text{Mit } g(x) = -ix_n f(x) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t_n} \hat{f}(t) = \hat{g}(t) = -ix_n \hat{f}(t)$$

$$\text{Wiederholt} \Rightarrow \frac{\partial^n}{\partial t_n^n} \hat{f}(t) = (-ix_n)^n \hat{f}(t)$$

Note 1]

Wenn $ay'' + by' + cy = 0$, mit $b^2 = 4ac$,

man hat $r = r_{1,2} = \frac{-b}{2a}$. Dann eine Lösung ist $e^{rt} = y_1(t)$

Für eine general Lösung, betrachten $y_2(t) = v(t)y_1(t)$

$$\Rightarrow y_2'(t) = v' e^{rt} + r v e^{rt}$$

$$y_2''(t) = v'' e^{rt} + r v' e^{rt} + r v' e^{rt} + r^2 v e^{rt} \\ = v'' e^{rt} + 2r v' e^{rt} + r^2 v e^{rt}$$

$$ay'' + by' + cy =$$

$$= av'' e^{rt} + 2arv' e^{rt} + ar^2 v e^{rt}$$

$$+ b v' e^{rt} + b r v e^{rt}$$

$$+ c v e^{rt}$$

$$= e^{rt} [av'' + (2ar + b)v' + (ar^2 + br + c)v] = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{rt} [av'' + (2ar + b)v'] = 0$$

$$\hookrightarrow r = \frac{-b}{2a} \Rightarrow 2ar + b = 2a \cdot \frac{-b}{2a} + b = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{rt} [av''] = 0 \Leftrightarrow v'' = 0$$

$$\Leftrightarrow v'(t) = C \Leftrightarrow v(t) = tC + K$$

$$y(t) = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

$$= C_1 e^{rt} + C_2 (tC + K) e^{rt}$$

$$= C_1 e^{rt} + (t C C_2 + C K) e^{rt}$$

$$= \underbrace{(C_1 + C K)}_{\tilde{C}_1} e^{rt} + t \underbrace{C C_2}_{\tilde{C}_2} e^{rt}$$

$$= \tilde{C}_1 e^{rt} + t \tilde{C}_2 e^{rt}$$

y_1, y_2 linear unabhängig sind

Übungen

Lösen Sie die folgenden

1) $y' = e^{-y}(2x-4)$ mit $y(5) = 0$

Lös: $y' = e^{-y}(2x-4) \Leftrightarrow \int e^y dy = \int (2x-4) dx$

$\Leftrightarrow e^y = x^2 - 4x + c$ mit $e^{y(5)} = 1 = 25 - 20 + c \Rightarrow c = -4$

gibt $e^y = x^2 - 4x - 4$

$\Leftrightarrow \ln(e^y) = y(x) = \ln(x^2 - 4x - 4)$

2.i) $y'' - 6y' - 2y = 0$ mit $y(0) = 1, y'(0) = 2$

Lös: Char.-Gleich. ist $r^2 - 6r - 2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(-2)}}{2}$
 $= \frac{6 \pm \sqrt{44}}{2} = 3 \pm \sqrt{11}$

$\Rightarrow y(t) = c_1 e^{(3+\sqrt{11})t} + c_2 e^{(3-\sqrt{11})t}$

$y(0) = c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = 1 - c_2$

$y'(t) = c_1(3+\sqrt{11})e^{(3+\sqrt{11})t} + c_2(3-\sqrt{11})e^{(3-\sqrt{11})t}$

$y'(0) = c_1(3+\sqrt{11}) + c_2(3-\sqrt{11}) = 2$

$\Leftrightarrow 3 + \sqrt{11} + -c_2(3+\sqrt{11}) + c_2(3-\sqrt{11}) = 2$

$\Leftrightarrow 3 + \sqrt{11} + \underline{-3c_2} + \underline{-c_2\sqrt{11}} + \underline{3c_2} + \underline{-c_2\sqrt{11}} = 2$

$\Leftrightarrow 1 + \sqrt{11} = 2c_2\sqrt{11} \Rightarrow c_2 = \frac{1+\sqrt{11}}{2\sqrt{11}}$

ii) $y'' - 4y' + 4y = 0$; $y(0) = 12, y'(0) = -3$

Lös: $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 \Rightarrow r_1 = r_2 = 2$

$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$; $y(0) = c_1 = 12$

$y'(t) = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} + c_2 2t e^{2t}$; $y'(0) = 2c_1 + c_2 = 24 + c_2 = -3$

$\Leftrightarrow y(t) = 12e^{2t} + -27te^{2t}$

$$4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(y+1)}{x(x-1)}$$

$$\text{Lös: } \int \frac{dy}{y(y+1)} = \int \frac{dx}{x(x-1)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y} + \frac{-1}{y+1} dy = \int \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| - \ln|y+1| = -\ln|x| + \ln|x-1| + C$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$$

$$\Rightarrow \frac{y}{y+1} = e^C \cdot \frac{x-1}{x}$$

$$\Rightarrow y = (y+1) \cdot K \cdot \frac{(x-1)}{x} = \frac{K(x-1)}{x} \cdot y + \frac{(x-1)}{x} \cdot K$$

$$\Rightarrow y \cdot \left[1 - \frac{K(x-1)}{x}\right] = \frac{x-1}{x} \cdot K \quad | \cdot x$$

$$\Rightarrow y \cdot (x - K(x-1)) = (x-1) \cdot K$$

$$\Rightarrow y = \frac{K(x-1)}{x - K(x-1)}$$