

Diskrete Logistikgleichung

In Übungsblatt 7, du hast gesehen die Disk.
Logistikgleich.

$$x_{n+1} = (1+\lambda) x_n (1-x_n) \quad 0 < \lambda < 1$$

$$F_r(x) = r x_n (1-x_n) \quad 1 < r < 2$$

Was passiert wenn $r > 2$?

$\hookrightarrow 2 < r < 3 \Rightarrow$ gleiches Verhalten als $1 < r < 2$

$\hookrightarrow$ Devaney "Intro. to Chaotic Dyn. Sys." pg 33

$\exists!$ Fixpunkte $p_\lambda \Rightarrow F_r^2([\tilde{p}_\lambda, p_\lambda]) \subseteq [\tilde{p}_\lambda, p_\lambda] \Rightarrow F_\lambda^n(x) \rightarrow p_\lambda$
 $\tilde{p}_\lambda$ st. $F_r(\tilde{p}_\lambda) = p_\lambda$

$\hookrightarrow (0, \tilde{p}_\lambda) \xrightarrow{F_\lambda^n} [\tilde{p}_\lambda, p_\lambda] ; (p_\lambda, 1) \rightarrow (0, p_\lambda)$

$\hookrightarrow 3 < r < 4 \Rightarrow$ Film (~15 min)

$\hookrightarrow r > 4$

$$F'_r(x) = r(1-x) + r x = r + 2rx = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

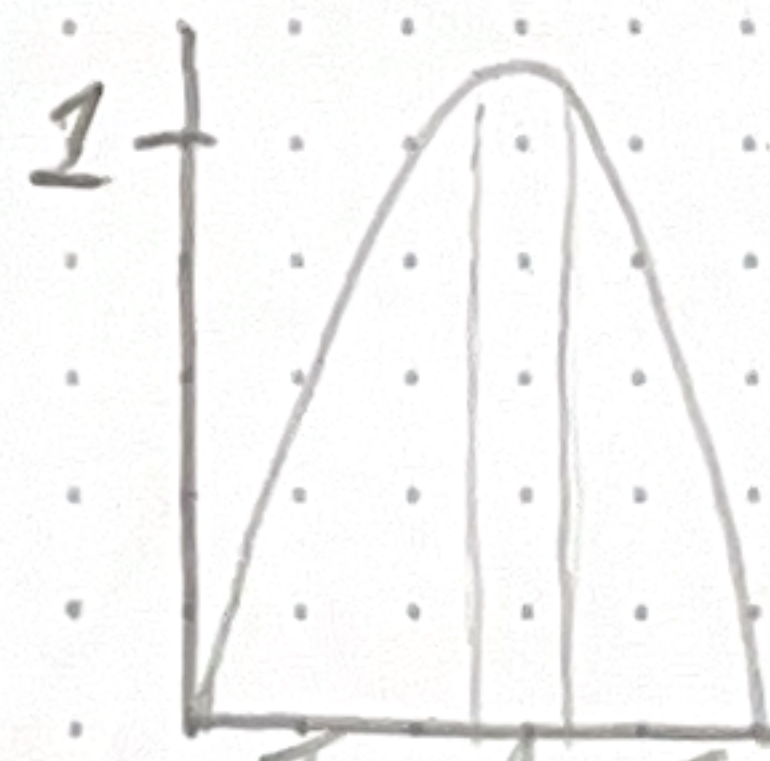
$$\Rightarrow F_r(\frac{1}{2}) = r \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{r}{4} \text{ max. wert}$$

Als $r > 4 \Rightarrow r/4 > 1 \Rightarrow \exists x \in I$ st. $F_r(x) > 1$.

$$\Rightarrow A_0 = \{x \in I \mid F_r(x) > 1\}$$

$$F_r(x) > 1 \Rightarrow F_r^2(x) < 0$$

$$\Rightarrow F_r^n(x) \rightarrow -\infty$$



$\therefore$ Die interessanten Punkte sind die I_0, A_0, I_1

die in I bleiben

$$\Rightarrow A_n := \{x \in I \mid F_r^i(x) \in I \text{ für } i \leq n, F_r^{n+1}(x) > 1\} \text{ (Punkte die verlassen)}$$

$$\Rightarrow \Delta = I \setminus \bigcup_{n \geq 0} A_n$$

BRUNNEN Cantor-ähnliche Konstruktion

Kann man beweisen, dass A tatsächlich eine Cantormenge ist
 $\hookrightarrow$ Devaney 3.5-3.8

Es gibt andere interessante Verbindungen, wenn $r=4$.

Sei $g(x) = \sin^2(2\pi x)$ und $D(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$
 $\Rightarrow F_4 \circ g(x) = 4 \sin^2(2\pi x) \cdot (1 - \sin^2(2\pi x))$
 $= 4 \sin^2(2\pi x) \cos^2(2\pi x)$

① $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

$g \circ D(x) = \sin^2(2 \cdot 2\pi x) = \underbrace{(2 \sin(2\pi x) \cos(2\pi x))}_{\textcircled{1}}^2$

② $\frac{1}{2} < x \leq 1$

$g \circ D(x) = \sin^2(2\pi(2x-1)) = \sin^2(2 \cdot 2\pi x - 2\pi)$
 $= \sin^2(2 \cdot 2\pi x) = \textcircled{1}$

$\exists F_4$ ist topologisch semi-konjugiert zu $D(x) = 2x \bmod 1$

Wobei $D(x)$ symbolische Verbindungen hat

$\hookrightarrow \exists$ 1-1 (b.c.) Abbildung zwischen $D(x)$ und

$\Sigma_2 = \{s = s_0 s_1 s_2 \dots \mid s_i \in \{0, 1\}\}$

Übungen

1) Benutzen Picard-Iteration zu lösen

$y' = 2(y+1) \quad y(0) = 0 \quad \text{mit} \quad y_0(t) = 0$

Lös: $y_1(t) = \int_{s=0}^t f(s, y_0(s)) ds = \int_{s=0}^t 2(y_0(s)+1) ds = \int_{s=0}^t 2 ds = 2t$

$y_2(t) = \int_{s=0}^t 2(y_1(s)+1) ds = \int_{s=0}^t 2(2s+1) ds = \frac{2^2}{2!} t^2 + 2t$

$y_3(t) = \int_{s=0}^t 2(y_2(s)+1) ds = \int_{s=0}^t 2 \cdot \left(\frac{2^2}{2!} s^2 + 2s + 1 \right) ds = \frac{(2t)^3}{3!} + \frac{(2t)^2}{2!} + 2t$

$\therefore y_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(2t)^k}{k!}$

$\Rightarrow y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(2t)^k}{k!} - 1 = e^{2t} - 1$

2] Bestimmen Sie die Eigenwert und Eigenvektors,
Linear unabhängig?

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -15 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Lös: $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 7-\lambda & -15 \\ 2 & -4-\lambda \end{pmatrix}$

Char. polynomial $\Rightarrow (7-\lambda)(-4-\lambda) + 30 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$

- " - Gleichung $\Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2) = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \text{ e.w.}$$

E- $\vec{v}$: $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 6 & -15 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lambda = 2 \quad \begin{pmatrix} 5 & -15 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Lin. unabhängig $\Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1 \neq 0 \quad \checkmark$

3] Beweisen Sie, für $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$
mit λ_i die Eigenwerte von A .

Bew: $\det(A - \lambda I) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$

Setze $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det(A) &= (-1)^n (0 - \lambda_1)(0 - \lambda_2) \cdots (0 - \lambda_n) \\ &= (-1)^n (-1)^n \prod_{i=1}^n \lambda_i = \prod_{i=1}^n \lambda_i \end{aligned}$$

4.] Bestimmen Sie die Fourier Transform für $f(x) = \max\{1 - |x|, 0\}$

Note: $f(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & 0 < x \leq 1 \end{cases}$

$$\text{Lös: } \hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-1}^0 (1+x) e^{-ixt} dx + \int_0^1 (1-x) e^{-ixt} dx \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\left. -\frac{1}{it} (1+x) e^{-ixt} \right|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{-1}{it} e^{-ixt} dx \right.$$

$$\left. + \left. -\frac{1}{it} (1-x) e^{-ixt} \right|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{it} e^{-ixt} dx \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\left. -\frac{1}{it} (1-x) e^{-ixt} \right|_{-1}^0 + \left. \frac{1}{t^2} e^{-ixt} \right|_{-1}^0 - \left(0 - \frac{1}{it} \right) - \left. \frac{1}{t^2} e^{-ixt} \right|_0^1 \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-1}{it} + \frac{1}{t^2} (1 - e^{it}) + \frac{1}{it} - \frac{1}{t^2} (e^{-it} - 1) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t^2} (2 - e^{it} - e^{-it}) \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} t^2 (1 - \cos(t))$$