

Matrizen

03.12.2024

U2-135

Erinnern Sie die Folgendes.

Für zwei Matrizen (eine Vektor ist eine $m \times 1$ Matrix),

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & & & & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & - & - & b_{1l} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & - & - & b_{ml} \end{pmatrix}$$

die Produkt $A \cdot B$ ist definiert, nur wenn $n = m$.

$(\overbrace{n \times n}^{A}) \cdot (\underbrace{m \times l}_B)$ $\rightarrow n \times l$ ist die Größe von $A \cdot B$

$\hookrightarrow$ "row by column"

Def: $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ und $\vec{v} \neq 0$. Wenn $A \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, wir sagen $\vec{v}$ ist eine Eigenvektor mit Eigenwert λ .

① $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ mit $A = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n]$ ($\vec{v}_i$ Spaltenvektor)

Die folgenden sind äquivalent

1) $\text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} = \mathbb{R}^m$

2) $\forall b \in \mathbb{R}^m, b = \sum_{i=1}^n b_i \vec{v}_i \quad (b_i \in \mathbb{R})$

3) $Ax = b$ hat Lösung für alle $b \in \mathbb{R}^m$

4) $\text{Rang}(A) = m$ (Dimension von Raum $\text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$)

$\Rightarrow \sum c_i \vec{v}_i = 0 \Rightarrow c_i = 0 \quad \forall i$

Def: Wenn $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ linear unabhängig ist, und

$\text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ ist der ganze Raum, dann wir sagen

es ist eine Bas. Die Anzahl der Vektoren in der Bas ist die

Dimension von der Raum.

Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ ein Basis für $\mathbb{R}^n$ und

$$P_B = [v_1, \dots, v_n]$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$, und $[x]_B$ die Koordinatenvektor von x in B ,
wir haben $x = P_B [x]_B$

In der Standardbasis $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, $[x]_E = x$, und so

$$[x]_E = P_B [x]_B$$

Man kann die oben als $E P_B$ schreiben.

Natürlich, wir haben

$$P_B^{-1} [x]_E = [x]_B \quad \text{mit} \quad {}_B P_E = (E P_B)^{-1}$$

Beispiel: Sei $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

und $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Wir haben

$$\det(P_B) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$$

$\rightarrow$ linear unabh.
 $\rightarrow B$ eine Basis.

! $[x]_B$ ist die Lösung zu $P_B [x]_B = x$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{1}{3} R_3]{\frac{1}{4} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad R_1 + 3R_2 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3/2 & -13/2 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_1 + 3/2 R_3 \\ R_2 + 3/2 R_3 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} R_2 + 3/2 R_3 \\ R_1 + 3/2 R_3 \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad [x]_B = \begin{pmatrix} -5 \\ 5/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Prüfung: $-5v_1 + 2v_2 + v_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

In Allgemeinen, für zwei (nicht-standard) Basen B, C , wir haben

$$E P_B = [v_1, \dots, v_n] \quad \text{und} \quad E P_C = [w_1, \dots, w_n], \quad \text{mit}$$

$$x = E P_B [x]_B \quad \text{und} \quad x = E P_C [x]_C, \quad \text{denn} \quad E P_C [x]_C = E P_B [x]_B$$

$$\Leftrightarrow [x]_C = (E P_C)^T E P_B [x]_B$$

Quadratisch Ergänzung

Eine "Perfekt Quadratisch" ist eine Gleichung von der Form $(x+b)^2$. Wir möchten eine Gleichung ax^2+bx+c zu dieser Form bringen.

Betrachten Sie die Folgenden,

$$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$$

Fall 1) $x^2 + bx$

$$\Rightarrow x^2 + bx = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

"2a"

Fall 2) $x^2 + bx + c$

$$\Rightarrow x^2 + bx + c = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \tilde{c} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \tilde{c}$$

Der gleiche Prozess!

Fall 3) $ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a}\right) \cdot a \end{aligned}$$

"2a"

Übung:

1.) Ergänzung Sie die Quadratisch $3x^2 - 9x + 50$

Lösung: $3\left(x^2 - 3x + \frac{50}{3}\right) = 3\left[x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{50}{3} - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right]$

$$= 3\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{50}{3} - \frac{9}{4}\right] \quad \textcircled{+} = \frac{-27}{12} + \frac{200}{12} = \frac{173}{12}$$

$$= 3\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{173}{12}\right]$$

2) Finden Sie $[v]_B$ für $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ in der Basis

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Lösung: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{RR} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow [v]_B = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

3) Mit $e^{-ixt} = \cos(xt) - i \sin(xt)$, was passiert zu $\text{Re}(\hat{f}(t))$ und $\text{Im}(\hat{f}(t))$, wenn $f(x)$ reelle Funktion wenn

a) $f(x)$ gerade

b) $f(x)$ ungerade

Lös: Mit $\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt} dx$, wir haben

$$a) \hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(xt) dt + \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(xt) dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{Re}(\hat{f}(t)) + \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \text{Im}(\hat{f}(t))$$

$$\text{Re}(\hat{f}(t)) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(xt) dt \quad \text{durch gerade}$$

$$\text{Im}(\hat{f}(t)) = -2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(xt) dt = 0 \quad \text{ungerade}$$

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{Re}(\hat{f}(t))$$

b) Als oben,

$$\text{Re}(\hat{f}(t)) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(xt) dt = 0 \quad \text{ungerade}$$

$$\text{Im}(\hat{f}(t)) = - \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(x)}_{\text{gerade}} \sin(xt) dt = -2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(xt) dt$$

$$\text{Aber } \hat{f}(-t) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \text{Im} \hat{f}(t) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \cdot -2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot -\sin(xt) dt$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(xt) dt = -\hat{f}(t)$$

$\hat{f}$ ungerade

4) Beweisen Sie die Folgenden

i) Mit $g(x) = f(x - x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ fixiert,
 $\hat{g}(t) = e^{-ix_0 t} \hat{f}(t)$

ii) Mit $g(x) = e^{ixt_0} f(x)$, $t \in \mathbb{R}$ fixiert,
 $\hat{g}(t) = \hat{f}(t - t_0)$

Lös: i) $\hat{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(x - x_0) dx$

$$\begin{aligned} x &= u + x_0 \\ u &= x - x_0 \\ du &= dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(u+x_0)t} f(u) du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iut} \cdot e^{-ix_0 t} f(u) du = e^{-ix_0 t} \hat{f}(t)$$

ii) $\hat{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} \cdot e^{ixt_0} f(x) dx$ $ixt_0 = -i(-x)t_0$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix(t-t_0)} f(x) dx = \hat{f}(t-t_0).$$