

Simultane Diagonalisierung

tspindel@math.uni-bielefeld.de

10.10.2024
U2-135

Def: i) $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, wir sagen A und B sind ähnlich, ($A \sim B$) wenn es gibt $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ invertierbar,

so dass $P^{-1}AP = B$

ii) Wir sagen A ist diagonalisierbar, wenn $A \sim D$, mit D eine Diagonal Matrix.

Wenn A diagonalisierbar ist? Was ist P ?

Sei A diagonalisierbar, d.h. $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow AP = PD \Leftrightarrow AP = A[v_1, \dots, v_n] = [Av_1, \dots, Av_n]$$

$$\text{und } PD = [v_1, \dots, v_n] \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = [\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n]$$

Danach, $Av_1 = \lambda_1 v_1$ und $Av_2 = \lambda_2 v_2$, und, ..., $Av_n = \lambda_n v_n$

Als P^{-1} existiert, die Lösung ist nicht null.

∇ Eindeutig bis zur Permutation

λ_i, v_i sind Eigenwerte und Eigenvektoren.

Die Umkehrung gilt auch.

$\hookrightarrow A$ hat n linear unabhängige Eig.vekt. $v_1, v_2, \dots, v_n$. Sei $P = [v_1, \dots, v_n]$,

dann $Av = \lambda v \Rightarrow AP = PD \Rightarrow P^{-1}AP = D$.

① $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ diagonalisierbar genau dann, wenn es hat n lin. unabh. Eigenvekt.

Bew: Lehrbuch

Notiz: Wenn A hat n verschiedene Eigenwerte, dann A diagon. ist.

Def: Für E.w. λ_i von A , es hat

i) algebraische Multiplizität k_i , wenn $k_i \in \mathbb{N}$ maximal, so dass $(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$ teilt die Char. Polynome von A .

ii) geometrische Multiplizität l_i , wenn l_i die Dimension von der Eigenraum von λ_i .

$\hookrightarrow$ der Nullraum $N(A - \lambda_i I)$

$$= \{v \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda_i I)v = 0\}$$

① (gleich geschrieben)

A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ alg. Mult. = geo. Mult.

Bew: Lehrbuch

Def: $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ heißt simultane Diagonalisierbar, wenn $\exists S \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ invertierbar, sd. $S^{-1}AS$ und $S^{-1}BS$ sind beide diagonal Matrizen.

Notiz: Wenn A, B sim. diag $\Rightarrow AB = BA$.

Bew: $AB = S(S^{-1}AS)(S^{-1}BS)S^{-1} \stackrel{!}{=} S(S^{-1}BS)(S^{-1}AS)S^{-1} = BA$
 $\uparrow$ diagonale Matrizen vertauschen

① Sei $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ beide diagonalisierbar sind. Dann A, B vertauschen, genau dann wenn sie sind sim. diag.

Bew: " $\Leftarrow$ " Fertig

" $\Rightarrow$ " Lemma: Sei E_λ die Eigenraum (von λ) von A , mit $AB=BA$
 Wenn $v \in E_\lambda$, dann $Bv \in E_\lambda$

Pf: $A(Bv) = BA\vec{v} = B\lambda v = \lambda Bv$
 $\hookrightarrow v \in E_\lambda$ □

$[A]_v = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda_{v_i} \end{pmatrix}$

Blockdiagonal
 $\downarrow$
 $\text{Lemma} \Rightarrow \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & B_2 & \\ & & \ddots \\ & & & B_{v_i} \end{pmatrix} = [B]_v$

Note: $[A]_v = P^{-1}[A]_E P$
 Standard Basis

Diagonalisieren die Blöcke

$\Rightarrow$ Eig.vekt von B_j sind auch Eig.vekt von $\lambda_j I$
 $\rightarrow$ Diese sind ev. von beide A und B

Bispiel: $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $AB = BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ □

1. Diagonalisieren $A \Rightarrow \lambda_1 = 2$ mit $d_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\lambda_2 = -2$ mit $d_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $d_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$[A]_D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 2. Was ist $[B]_D$?

$$Bd_1 = d_2, Bd_2 = d_1, Bd_3 = d_4, Bd_4 = d_3$$

$$\Rightarrow [B]_D = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Jetzt, dragen. jeder Block

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{e.w.} = \pm 1, \text{ ev.} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = B_1 \Rightarrow \text{--- " ---}$$

$$\underline{\text{4. Zurück. Konvertieren}} \Rightarrow \text{e.v.} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$[b_1]_D \quad [b_2]_D \quad [b_3]_D \quad [b_4]_D$

$$\Rightarrow b_1 = d_1 + d_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; b_2 = d_1 - d_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$b_3 = d_3 + d_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b_4 = d_3 - d_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1

$\mathcal{C} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ sind e.v. von A und B !

$$\text{und in diesem Basis, } [A]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [B]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Überprüfung:

$$Ab_1 = A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ähnlich für die anderen

$$Bb_1 = B \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Übung:

- 1) Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ mit nur ein e.w. λ (d.h. mit multip. n),
und A auch diagonalisierbar.
Was ist die Form von A ?

Lösung: A diag. $\Rightarrow \exists S \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ s.d. $S^{-1}AS = D = \lambda I$
 $\Rightarrow A = SS^{-1}ASS^{-1} = S\lambda I S^{-1} = \lambda S S^{-1} = \lambda I$

- 2) Bestimmen Sie, ob A diagonalisierbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -7 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Wenn "Ja", finden Sie P das A diagonalisiert.

Lösung: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \Rightarrow \begin{vmatrix} -4-\lambda & -6 & -7 \\ 3 & 5-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$

$$= 0 \begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 5-\lambda & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -4-\lambda & -7 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (3-\lambda) \begin{vmatrix} -4-\lambda & -6 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (3-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)$$

3 verschiedene e.w. $\Rightarrow$ diagonalisierbar.

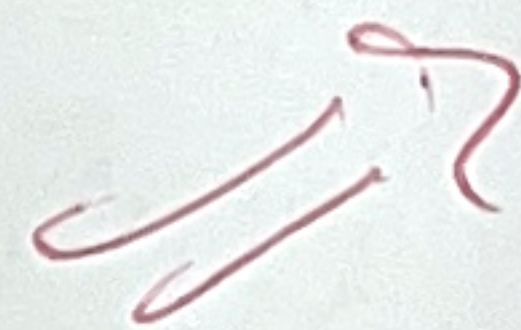
e.v. $\Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -7 & -6 & -7 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} v_1 = -v_3 \\ v_2 = 0 \\ \uparrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 \end{matrix}$

$\lambda = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & -6 & -7 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_2$

$\lambda = -1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -6 & -7 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\uparrow P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = A.$

4



3] Betrachten Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Finden Sie e.v. so sie sind e.v. von A und B beide.
D.h., simultane Diagonalisierung Sie. (Beide sind diagonalisierbar)

Lös: $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

→ Sie sind nicht simultane diag.

gew. A $\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 1) + \lambda = -\lambda^3 + 2\lambda = \lambda(\lambda^2 + 2)$$

e.v. $\Rightarrow \lambda_1 = -\sqrt{2} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \sqrt{2}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 0 \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

B $\Rightarrow \lambda_1 = 3, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 2, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$ ~~$\lambda_3 = 1, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$~~

$\lambda_3 = -1, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$