

Jordan-Normalform

Erinnerung: Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ heißt diagonalisierbar, wenn es eine invertierbare Matrix $P \in M(n \times n, \mathbb{K})$ und eine Diagonalmatrix $D \in M(n \times n, \mathbb{K})$ gibt, so dass $P^{-1}AP = D$ gilt.

Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie n linear unabhängige Eigenvektoren hat.

Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar!

Solange das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, können wir die Matrix in eine "fast-diagonale" Form bringen.

Def: Der Hauptraum einer Matrix $M(n \times n, \mathbb{K})$ zum Eigenwert λ ist definiert durch

$$\text{Hau}(A, \lambda) := \bigcup_{j=1}^r \ker((A - \lambda I_n)^j),$$

wobei r die algebraische Vielfachheit von λ ist.

Satz: Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ mit $P_A(t) = \pm (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$ und paarweise verschiedenen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$. Dann gelten:

(a) $A \text{Hau}(A, \lambda_j) \subseteq \text{Hau}(A, \lambda_j)$ und $\dim(\text{Hau}(A, \lambda_j)) = r_j$, $j \in \{1, \dots, k\}$

(b) $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{j=1}^k \text{Hau}(A, \lambda_j)$

(c) A hat eine Zerlegung $A = A_D + A_N$, wobei A_D diagonalisierbar und A_N nilpotent ist (d.h. es gibt ein $d \in \mathbb{N}$ mit $N^d = 0$).

Def: Eine Matrix der Form $J_k := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, für die $(J_k)^k = 0$ gilt und k minimal mit dieser Eigenschaft ist, heißt Jordan-Matrix.

Satz: Es seien $N \in M(n \times n, K)$ eine nilpotente Matrix und $d := \min \{l : N^l = 0\}$.

Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $s_1, \dots, s_d \in \mathbb{N}$ mit

$$d s_d + (d-1) s_{d-1} + \dots + 1 \cdot s_1 = n$$

und eine invertierbare Matrix $P \in M(n \times n, K)$ mit $P^{-1} A P = \begin{pmatrix} J_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{s_1} \end{pmatrix}$, wobei s_d -mal J_d , s_{d-1} -mal J_{d-1} , ..., und s_1 -mal J_1 auftritt.

Wie bringt man nun eine Matrix in Jordan-Normalform?

Algorithmus.

Sei $A \in M(n \times n, K)$ eine Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt.

① Bestimme die Eigenwerte von A .

② Für jeden Eigenwert λ von A führe folgende Schritte aus:

(i) Berechne $\ker((A - \lambda 1_n)^i)$ für alle $1 \leq i \leq m$, wobei m die kleinste Zahl ist mit $\ker((A - \lambda 1_n)^m) = \ker((A - \lambda 1_n)^{m+1})$.

(ii) Für $s = 1, \dots, m$ bestimme $d_s = d_s(\lambda) = \dim(\ker(A - \lambda 1_n)^s) - \dim(\ker(A - \lambda 1_n)^{s-1})$.

(iii) Wähle d_m Hauptvektoren m -ter Stufe, d.h.

$$v_{1,m}, \dots, v_{d_m,m} \in \ker((A - \lambda 1_n)^m) \setminus \ker((A - \lambda 1_n)^{m-1})$$

mit: aus $\lambda_1, \dots, \lambda_{d_m} \in K$ und $\sum_{i=1}^{d_m} \lambda_i v_{i,m} \in \ker((A - \lambda 1_n)^{m-1})$

folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{d_m} = 0$.

- Für $j = m, m-1, \dots, 2$ fahren wir wie folgt fort:

Setze $v_{i,j-1} := (A - \lambda 1_n) v_{i,j}$ für $1 \leq i \leq d_j$. Ergänze die so erhaltenen $v_{1,j-1}, \dots, v_{d_{j-1},j-1}$ zu d_{j-1} Hauptvektoren $(j-1)$ -ter Stufe (falls $d_{j-1} > d_j$, sonst ist nichts zu tun), d.h.

$$v_{1,j-1}, \dots, v_{d_{j-1},j-1} \in \ker((A - \lambda 1_n)^{j-1}) \setminus \ker((A - \lambda 1_n)^{j-2})$$

mit: aus $\lambda_1, \dots, \lambda_{d_{j-1}} \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{i=1}^{d_{j-1}} \lambda_i v_{i,j-1} \in \ker((A - \lambda 1_n)^{j-2})$ folgt $\lambda_1 = \dots = \lambda_{d_{j-1}} = 0$.

③ Schreibe alle $v_{i,j}$ als Spaltenvektoren in eine Matrix $P = (v_{1,1}, \dots, v_{1,m}, v_{2,1}, \dots, v_{2,m}, \dots, v_{d_1,1}, \dots, v_{d_1,m})$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $P_A(\lambda) = (1-\lambda)^3(2-\lambda)$

zu $\lambda = 1$ $A - 1 \cdot 1_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $(A - 1 \cdot 1_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$(A - 1 \cdot 1_4)^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ für alle $n \geq 3$, also $m = 3$.

$\ker(A - 1 \cdot 1_4) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\ker((A - 1 \cdot 1_4)^2) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$,

$\ker((A - 1 \cdot 1_4)^3) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

$d_1 = d_2 = d_3 = 1$

Wähle $v_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \ker((A - 1 \cdot 1_4)^3) \setminus \ker((A - 1 \cdot 1_4)^2)$.

Setze $v_{1,2} = (A - 1 \cdot 1_4) v_{1,3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_{1,1} = (A - 1 \cdot 1_4) v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

zu $\lambda=2$: $A - 2 \cdot I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\ker(A - 2 \cdot I_4) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Setze $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ mit $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $P_A(\lambda) = (2-\lambda)^4$

$$A - 2 \cdot I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A - 2 \cdot I_4)^2 = 0, \quad m=2$$

$$\ker(A - 2 \cdot I_4) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad d_1 = d_2 = 2$$

Wähle $v_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker((A - 2 \cdot I_4)^2) \setminus \ker(A - 2 \cdot I_4)$.

Wir erhalten

$$v_{1,1} = (A - 2 \cdot I_4)v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$