

Leitfaden zur Vorlesung Vertiefung Mathematik II für Naturwissenschaften und Technik

von Michael Baake

unter Einbezug einer
Skriptvorlage von Dirk Frettlöh

ausgearbeitet von
Andreas Klötgen

mit Ergänzungen von
Michael Baake und Sebastian Herr

12. Dezember 2023

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation und Ursprünge	1
1.1	Motivation und Ziele	1
1.2	Ursprünge: Die 1-dimensionale Wellengleichung	1
2	Fourier-Reihen	5
2.1	Konvergenzverhalten der Fourier-Reihe	9
2.2	Weiterentwicklung der Theorie der Fourier-Reihen	11
2.3	Vollständigkeit und Banach'scher Fixpunktsatz	13
3	Hilbert-Räume und Fourier-Reihen	18
3.1	Allgemeine Eigenschaften	18
3.2	Die Gauß'sche Approximationsaufgabe	21
3.3	Fourier-Reihen: Ergänzungen	23
4	Fourier-Transformation	26
4.1	Von der Fourier-Reihe zur Fourier-Transformation	26
4.2	Fourier-Transformation	27
4.3	Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R})$	32
5	Diskrete Fourier-Transformation	37
5.1	Trigonometrische Interpolationsapproximation	42
5.2	Schnelle Fourier-Transformation	45
5.3	Beispiel: Bildkompression	46
6	Differentialgleichungen – eine kurze Wiederholung	47
6.1	Volterra-Integration	47
6.2	Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung	49
7	Markov-Ketten	52
7.1	Matrix-Normen und Matrix-Exponential	52
7.2	Markov-Matrizen und Markov-Generatoren	57

1 Motivation und Ursprünge

1.1 Motivation und Ziele

Die Fourier-Analyse findet heute in vielen Bereichen ihre Anwendung. Dazu gehören neben mathematischen Teilgebieten wie Zahlentheorie, Statistik oder Kombinatorik auch Gebiete der Signalverarbeitung oder Kryptographie. Ein in diesem Leitfaden beschriebenes Beispiel beschäftigt sich mit der Komprimierung von Bilddateien auf einem Computer zur effizienteren Speicherung. Der mathematische Hintergrund ist auf den französischen Mathematiker Jean Baptiste Joseph Fourier zurückzuführen, welcher im 19. Jahrhundert daran arbeitete. Dabei versuchte er in einer seiner Arbeiten, eine periodische Funktion durch eine trigonometrische Reihe darzustellen. In Abschnitt 1.2 wird ein erster Ansatz für dieses Problem erläutert, auf welchem die Fourier-Analyse aufbaut.

1.2 Ursprünge: Die 1-dimensionale Wellengleichung

Die Ursprünge der Fourier-Analyse lassen sich in der Wellengleichung finden. Betrachtet man die 1-dimensionale Wellengleichung, eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung für die Darstellung von Wellen,

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

benötigt man zur (eindeutigen) Lösung folgende Anfangswerte:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= g(x) \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= h(x). \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung wird an dieser Stelle nur kurz beschrieben, da es danach mehr um den Separationsansatz für die Anwendung auf die eingespannte Saite geht. Generell gilt für zwei beliebige, zweifach stetig ableitbare Funktionen Φ und Ψ einer Veränderlichen, dass die Summe $\Phi(x-ct) + \Psi(x+ct)$ die 1-dimensionale Wellengleichung löst (Beweis siehe Übungsaufgaben und Weiterführung in [1]). Dabei beschreibt der Term $\pm ct$ im Argument jeweils die Verschiebung des Wellenprofils $\Phi(x)$ bzw. $\Psi(x)$ entlang der x -Koordinate.

Betrachtet man nun eine an zwei Punkten (wir wählen 0 und π) eingespannte Saite, liegt eine spezielle Situation vor, die sich folgendermaßen behandeln lässt. Abbildung 1 zeigt eine Skizze der Situation. Diese Saite kann nun in eine Schwingung gebracht werden, wobei die Auslenkung an der Stelle x ($0 \leq x \leq \pi$) der Saite zur Zeit t ($t \geq 0$) gegeben ist durch eine Funktion $u: [0, \pi] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, welche durch die Wellengleichung aus (1) beschrieben wird. Der Separationsansatz $u(x, t) = v(x) \cdot w(t)$ wird in die Wellengleichung (1) eingesetzt, und es ergibt sich

$$\frac{\ddot{w}(t)}{w(t)} = \alpha^2 \frac{v''(x)}{v(x)}, \quad (2)$$

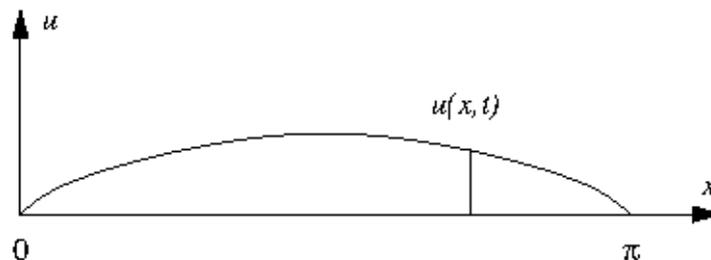


Abbildung 1: Eine in den Stellen 0 und π eingespannte Saite und ihre Auslenkung zum Zeitpunkt t , beschrieben durch die Funktion $u(x, t)$.

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Geschwindigkeits-Konstante ist. Ein Punkt (Strich) steht für die Ableitung nach t (nach x).

Da die Variablen in (2) nun getrennt auf jeder Seite der Gleichung stehen, muss unabhängig von der Wahl der Variablen x und t die Gleichung dennoch gelten. Es folgt also, egal wie x oder t verändert werden, dass der Wert konstant bleibt. Zur Veranschaulichung und einfacheren Schreibweise sei im Folgenden $\frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda$. Durch Umstellen der beiden Gleichungen erhält man dann:

$$v''(x) + \lambda v(x) = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{w}(t) + \alpha^2 \lambda w(t) = 0. \quad (3)$$

Gilt Gl. (3), so erfüllt $u(x, t) = v(x) \cdot w(t)$ die Saitengleichung. An dieser Stelle wird das Problem der Randbedingung deutlich, denn die Saite ist an zwei Stellen eingespannt. An den Stellen $x = 0$ und $x = \pi$ bestehen die Randbedingungen

$$v(0) = 0 \quad \text{und} \quad v(\pi) = 0 \quad (4)$$

für die Gleichung $v''(x) + \lambda v(x) = 0$. Dieses sogenannte *Randwertproblem* kann nur für bestimmte Werte von λ eine Lösung besitzen, wobei wir hier unter einer Lösung eine Funktion verstehen wollen, die zweimal stetig differenzierbar ist und die sowohl die DGL als auch die Randbedingungen erfüllt.

Lemma 1.1. *Ist $v \neq 0$ eine reelle Lösung des Randwertproblems für v , so ist $\lambda > 0$.*

Beweis. Da v stetig und nicht identisch 0 ist, gilt $\int_0^\pi (v(x))^2 dx > 0$ nach den üblichen Argumenten aus Analysis I. Nun können wir folgendermaßen rechnen:

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^\pi (v(x))^2 dx &= - \int_0^\pi v(x) v''(x) dx \\ &= - \underbrace{[v(x) v'(x)]_0^\pi}_{=0} + \int_0^\pi (v'(x))^2 dx = \int_0^\pi (v'(x))^2 dx > 0, \end{aligned}$$

wobei der erste Schritt die Lösungseigenschaft der DGL benutzt, der zweite partielle Integration, und der dritte die Randbedingung. Da nach Annahme auch v' stetig ist, aber

nicht identisch verschwinden kann (weil dann v konstant und folglich 0 sein müsste), folgt die Ungleichung, und wir bekommen

$$\lambda = \frac{\int_0^\pi (v'(x))^2 dx}{\int_0^\pi (v(x))^2 dx} > 0$$

wie behauptet. □

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung aus (3) für v (vgl. Übungsaufgaben für Lösungsweg) lautet

$$v(x) = c_1 \cdot \cos(\sqrt{\lambda} \cdot x) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{\lambda} \cdot x),$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten c_1 und c_2 . Aus den Randbedingungen ergibt sich

$$\begin{aligned} v(0) = 0 &\implies c_1 = 0, \\ v(\pi) = 0 &\implies c_2 \cdot \sin(\sqrt{\lambda} \cdot \pi) = 0, \end{aligned}$$

wobei die Lösung für c_2 nicht eindeutig ist. Da aber $c_2 \neq 0$ gefordert ist (ansonsten bekämen wir $v \equiv 0$), muss der zweite Term gleich 0 sein, also $\sin(\sqrt{\lambda} \cdot \pi) = 0$. Die Sinus-Funktion ist in allen ganzzahligen Vielfachen von π gleich 0, also geht $\sqrt{\lambda} = n$ für $n \in \mathbb{Z}$. Da $n = 0$ wiederum $v \equiv 0$ bedeutet, scheidet dieser Wert aus. Ausserdem bedeuten n und $-n$ letztlich dieselbe Funktion, da $\sin(-x) = -\sin(x)$ und ein Vorzeichen in die Konstante c_2 absorbiert werden kann. Also bleibt $\lambda = n^2$ mit $n \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe dieser Vorüberlegung kann man nun auch die zweite Gleichung aus (3) durch Einsetzen lösen: $\ddot{w} + (\alpha n)^2 w = 0$. Man erhält nun für die ursprüngliche Auslenkung mit Anfangsbedingungen (4) einer eingespannten Saite

$$\begin{aligned} v_n(x) &= \sin(nx), \\ w_n(t) &= A_n \cos(\alpha n t) + B_n \sin(\alpha n t), \\ u_n(x, t) &= \sin(nx)(A_n \cos(\alpha n t) + B_n \sin(\alpha n t)). \end{aligned}$$

Das Ergebnis des Separationsansatzes mit $\lambda = n^2$ ist also eine Teillösung mit zwei Konstanten A_n und B_n , wobei die Teillösungen durch die Wahl von $n \in \mathbb{N}$ bestimmt werden.

Für zwei Lösungen $u_n(x, t)$ und $u_m(x, t)$ ($n, m \in \mathbb{N}$) ist (wegen der Linearität der Gleichung) auch die Summe $u_n(x, t) + u_m(x, t)$ eine Lösung des Problems. Es folgt als Ansatz eine Summierung über alle möglichen Einzellösungen des Problems,

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} u_n(x, t), \tag{5}$$

wobei es eine nicht-triviale Aussage ist, dass man hierdurch tatsächlich alle möglichen Lösungen des Randwertproblems bekommen kann.

Die Startauslenkung zur Zeit $t = 0$ ist gegeben durch die Funktion $g(x)$. Das Geschwindigkeitsprofil $h(x)$, welches die Saite zum Zeitpunkt $t = 0$ besitzt, bestimmt dann

zusammen mit $g(x)$ die anschließende Bewegung. Hierbei gilt insbesondere, dass diese Funktionen sinnvoll sein müssen. Das heißt, dass g keine Sprungstellen haben darf, da die Saite dann an so einer Stelle gerissen ist. Es muss also gelten, dass g und h stetig sind. Mit Hilfe der Summe (5) lassen sich die Anfangsdaten wie folgt ausdrücken:

$$u(x, 0) = g(x) = \sum_{n \geq 1} A_n \sin(nx),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) = \sum_{n \geq 1} \alpha n \cdot B_n \cdot \sin(nx).$$

Außerdem muss die Reihe aus (5) konvergieren und zweimal stetig nach x und t ableitbar sein, damit diese eine (klassische) Lösung der ursprünglichen Gleichung (1) ist. Darauf kommen wir später noch einmal zurück.

Aus dem Beispiel der 1-dimensionalen Wellengleichung lässt sich nun die Fourier-Analyse begründen. Die Lösung bedeutet nämlich die Darstellung einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe. Die Fourier-Analyse beschäftigt sich aber auch mit komplexen Funktionen, bei denen dann komplexe e -Funktionen zum Einsatz kommen (später mehr dazu). Zunächst stößt man aber auf die Fourier-Reihen, welche sich direkt aus der aufgestellten Reihe aus (5) herleiten lassen. Im nächsten Abschnitt 2 werden diese weiter untersucht, um die Lösungen für die neu eingeführten Größen A_n und B_n zu bestimmen.

2 Fourier-Reihen

Betrachtet man die in Abschnitt 1.2 aufgestellte Reihe etwas allgemeiner, erhält man die Definition einer trigonometrischen Reihe für das Intervall $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \quad (6)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad (n \in \mathbb{N}_0) \quad (7)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (8)$$

Definition 2.1. Gegeben sei eine Funktion $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, mit $f(\pi) = f(-\pi)$. Die Reihe aus (6) heißt *Fourier-Reihe* (kurz: FR) von f auf $[-\pi, \pi]$. Die Koeffizienten a_n und b_n aus (7) und (8) heißen *Fourier-Koeffizienten* von f .

In diesem Zusammenhang stellen wir uns f auch auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt vor, indem wir fordern, dass $f(x+2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Dann ist f eine 2π -periodische Funktion (eine allgemeine Definition hierzu folgt noch). Sofern die Summe auf der rechten Seite von (6) in geeigneter Weise konvergiert (auch dies soll später noch genauer diskutiert werden), ist auch diese Summe 2π -periodisch.

An dieser Stelle wollen wir zunächst gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe voraussetzen, da dies in der unten benutzten Berechnung der Fourier-Koeffizienten a_n und b_n verwendet wird. Näheres dazu wird es später geben, hier reicht es erst einmal als Voraussetzung. Für diese Berechnung ist zusätzlich ein Lemma hilfreich.

Lemma 2.2.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ns) \sin(ms) ds = 0 \quad (n, m \geq 0) \quad (9)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ns) \cos(ms) ds = \delta_{n,m} \quad (n, m \geq 1) \quad (10)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(ns) \sin(ms) ds = \delta_{n,m} \quad (n, m \geq 1) \quad (11)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ds = 2, \quad (12)$$

wobei $\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = m, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Beweis. Dazu hilft eine kurze Vorüberlegung, die für $n \in \mathbb{Z}$ stimmt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = \begin{cases} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0, & n \neq 0, \\ 2\pi, & n = 0, \end{cases} \quad (13)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = 0. \quad (14)$$

Zusätzlich werden noch die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen verwendet:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad (15)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad (16)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad (17)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad (18)$$

Daraus folgt: Beweis für (9), für $n, m \geq 0$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ns) \sin(ms) \, ds \stackrel{(16)-(18)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin((n+m)s) - \sin((n-m)s) \, ds \stackrel{(14)}{=} 0.$$

Beweis für (10), für $n, m \geq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ns) \cos(ms) \, ds &\stackrel{(15)+(17)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)s) + \cos((n-m)s) \, ds \\ &\stackrel{(13)}{=} \delta_{n,m}. \end{aligned}$$

Beweis für (11), ebenfalls für $n, m \geq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(ns) \sin(ms) \, ds &\stackrel{(17)-(15)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)s) - \cos((n+m)s) \, ds \\ &\stackrel{(13)}{=} \delta_{n,m}. \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe von Lemma 2.2 kann man nun die Koeffizienten der FR bestimmen. Zunächst für die a_n , indem die FR aus (6) mit dem Faktor $\frac{1}{\pi} \cos(ns)$ multipliziert wird und anschließend von $-\pi$ bis π integriert wird, für $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(ns) \, ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(ms) + b_m \sin(ms) \right) \cos(ns) \, ds \\ &= \frac{a_0}{2\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(ns) \, ds}_{=2\pi\delta_{0,n}} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(ms) + b_m \sin(ms) \right) \cos(ns) \, ds \end{aligned}$$

Tauschen von Integral und Summe ist hier möglich,

da gleichmäßige Konvergenz vorausgesetzt wurde

$$\begin{aligned} &= a_0 \delta_{0,n} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ms) \cos(ns) \, ds}_{=\delta_{m,n} \text{ (nach (10))}} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(ms) \cos(ns) \, ds}_{=0 \text{ (nach (9))}} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \delta_{m,n} = a_n. \end{aligned}$$

Die Rechnung für die b_n läuft analog, diesmal für $n \geq 1$, nur dass jetzt zunächst mit dem Faktor $\frac{1}{\pi} \sin(ns)$ multipliziert wird und die Regel (11) verwendet wird. So erhält man die geschlossene Form der Fourier-Koeffizienten aus (7) und (8).

Definition 2.3. Gegeben sei eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, von der wir annehmen wollen, dass sie nicht konstant ist.

(a) f heißt *T-periodisch*, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x + T) = f(x).$$

Das kleinste positive T mit dieser Eigenschaft heißt *Periode* von f .

(b) Die Funktion f heißt *gerade* (bzw. *ungerade*), falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(-x) = f(x) \quad (\text{bzw. } f(-x) = -f(x)).$$

Noch ist nicht klar, ob (6) wirklich gilt, also ob die Fourier-Reihe wirklich gegen f konvergiert (z.B. punktweise oder sogar gleichmäßig). Falls dies allerdings stimmt, ist die Funktion auf ganz \mathbb{R} definiert. Zusätzlich gilt durch die Periodizität der Sinus- und Cosinus-Funktion, also $\sin(x) = \sin(x + 2n\pi)$ und $\cos(x) = \cos(x + 2n\pi)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, dass auch die Funktion f periodisch ist: $f(x) = f(x + 2n\pi)$ gilt dann für alle $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$. Die Funktion f ist also 2π -periodisch.

Beispiel 2.4. Wir setzen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (2n\pi, (2n+1)\pi), \\ 0, & x = n\pi \text{ mit } n \in \mathbb{Z}, \\ -1, & x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} ((2n-1)\pi, 2n\pi). \end{cases}$$

und betrachten nun das Rechtecksignal mit 2π -periodischer Fortsetzung in beiden Richtungen. Abbildung 2 zeigt diese Situation schematisch.

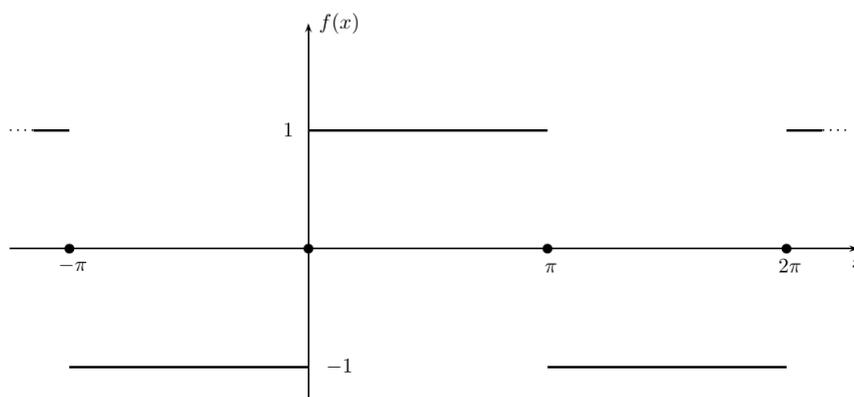


Abbildung 2: Der Verlauf des Rechtecksignals in einem kleinen Ausschnitt.

Die Funktion f aus Beispiel 2.4 ist eine ungerade Funktion, es gilt also $f(-x) = -f(x)$ für alle x . Zunächst werden nun die Fourier-Koeffizienten a_n und b_n berechnet.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \stackrel{y=-x}{=} \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(-y) \cos(-ny) (-1) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -f(y) \cos(ny) dy = -a_n \end{aligned}$$

Dabei wurde die Substitutionsregel eingesetzt und verwendet, dass die Cosinus-Funktion gerade ist. Man erhält, dass $a_n = -a_n$ gilt und damit $a_n = 0$, für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dies gilt allgemeiner für jede ungerade Funktion f . Einen Beweis für diese Aussage und das Verhalten einer geraden Funktion f bei der Berechnung der Fourier-Koeffizienten wird in den Übungsaufgaben weiter untersucht. Daher genügt es, an dieser Stelle nur noch die b_n weiter zu betrachten.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &\stackrel{y=-x}{=} \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 f(-y) \sin(-ny) (-1) dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (-f(y)) \cdot (-\sin(ny)) dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \underbrace{\left(\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n} \right)}_{=0 \text{ für gerade } n} = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 2k + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

In dieser Rechnung wurde verwendet, dass der Wert der Funktion f im Intervall $(0, \pi)$ gleich 1 ist, und die beiden Randpunkte zum Wert des Integrals nicht beitragen. Für gerade n gilt weiter, dass das Ergebnis immer 0 ist. So ergibt sich die Fallunterscheidung für das Ergebnis der b_n . Damit lässt sich nun eine sukzessive Approximation FR_N auf der Basis der Fourier-Reihe des Rechtecksignals folgendermaßen durch endliche Summation aufstellen:

$$\text{FR}_N := \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \dots + \frac{\sin((2N+1)x)}{2N+1} \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^N \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$$

Die berechnete Fourier-Reihe approximiert nun die Funktion $f(x)$ mit einer Folge von stetigen Funktionen in Abhängigkeit von N . Um dies zu veranschaulichen, zeigt Abbildung 3 einige Beispiele für verschiedene Werte von N , wobei zu erkennen ist, dass die sukzessive Approximation mit steigendem N besser wird.

Der erste Term der Fourier-Reihe ist ein Vielfaches der Sinus-Funktion, durch den zweiten Term erhält die Reihe allerdings schon eine Korrektur der Kurve in Richtung der ursprünglichen Funktion.

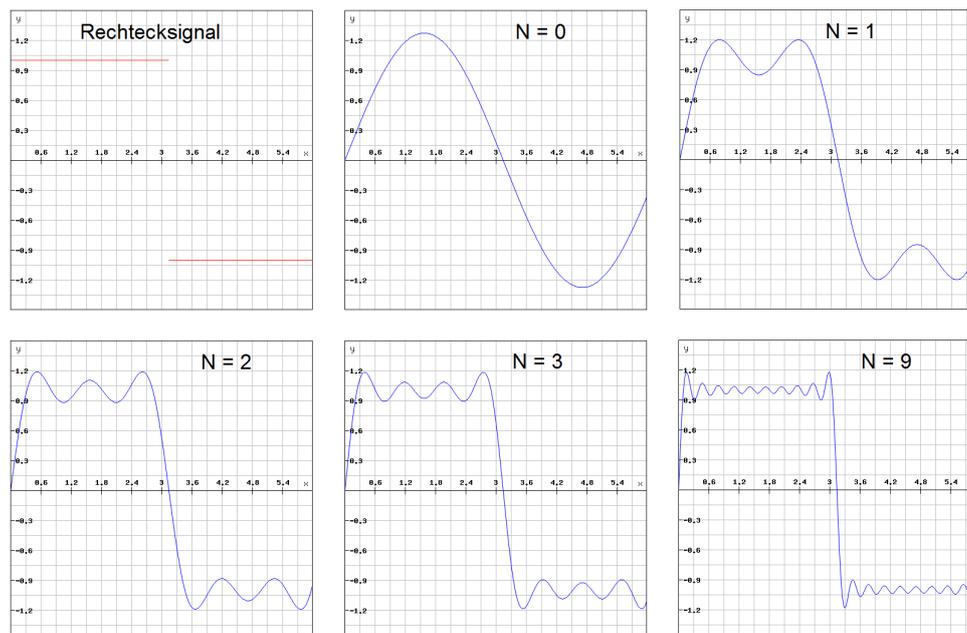


Abbildung 3: Rechtecksignal und die sukzessive Approximation durch die abgeschnittenen Fourier-Reihen mit $N = 0$, $N = 1$, $N = 2$, $N = 3$ und $N = 9$. An den Sprungstellen der ursprünglichen Funktion bei $n\pi$ sind die approximierenden Funktionen stetig, die Unstetigkeiten ergeben sich erst im Limes.

Es gibt an den Sprungstellen, also den ganzzahligen Vielfachen von π , in den Approximationen eine stärkere Ungenauigkeit. Die Fourier-Reihe zittert sozusagen stärker in diesem Bereich. Dies wird auch Gibbs'sches Phänomen genannt, wobei sich das Überschwingverhalten quantifizieren lässt. Die Untersuchung des Konvergenzverhaltens einer Fourier-Reihe ist also wichtig, und wird weiter unten noch genauer betrachtet.

2.1 Konvergenzverhalten der Fourier-Reihe

Definition 2.5. Gegeben sei eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ oder auch $f_n: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, wobei \mathbb{D} ein Intervall von \mathbb{R} sei. Dann definieren wir wie folgt:

(a) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *punktweise konvergent* gegen die Funktion f , falls

$$\forall x \in \mathbb{D}, \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$

(b) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *gleichmäßig konvergent* gegen die Funktion f , falls

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \forall x \in \mathbb{D}, n \geq N: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon;$$

(c) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *konvergent im quadratischen Mittel* gegen die Funktion f , falls

$$\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

(vgl. für $\|\cdot\|_2$ auch Definition 3.1).