

3 Hilbert-Räume und Fourier-Reihen

3.1 Allgemeine Eigenschaften

Zunächst benötigt man die Definition einer *Norm*, da diese ein wichtiger Bestandteil der hier behandelten Vektorräume sein wird.

Definition 3.1. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Norm*, wenn für beliebige Vektoren u, v und Zahlen α aus $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ folgende Eigenschaften gelten:

$$\begin{aligned}\|v\| &\geq 0, \quad \text{mit } \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0 \\ \|\alpha v\| &= |\alpha| \|v\| \\ \|v + u\| &\leq \|v\| + \|u\|\end{aligned}$$

Mit $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ wird der $\mathbb{C}$ -Vektorraum der auf $[-\pi, \pi]$ quadratintegrablen Funktionen bezeichnet, d.h. $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ existiert im Sinne von Lebesgue. Dabei benutzen wir nun auch den Begriff des Skalarproduktes.

Definition 3.2. Sei V ein komplexer Vektorraum. Eine Abbildung $\langle \cdot | \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Skalarprodukt* auf V , wenn folgende Eigenschaften für beliebige Elemente $f, g, h \in V$ und Zahlen $\alpha \in \mathbb{C}$ erfüllt sind:

$$\begin{aligned}\langle f | g + h \rangle &= \langle f | g \rangle + \langle f | h \rangle \\ \langle f | \alpha g \rangle &= \alpha \langle f | g \rangle \\ \langle g | f \rangle &= \overline{\langle f | g \rangle} \quad (\text{komplex konjugiert}) \\ \langle f | f \rangle &\geq 0, \quad \text{mit } \langle f | f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0.\end{aligned}$$

Man beachte, dass $\langle \alpha f | g \rangle = \bar{\alpha} \langle f | g \rangle$ eine Folge der geforderten Eigenschaften ist. Ist $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt, so definiert $\|f\| := \sqrt{\langle f | f \rangle}$ eine Norm auf V im Sinne von Definition 3.1. Dabei gilt dann die *Schwarz'sche Ungleichung*

$$|\langle f | g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|, \quad (23)$$

die eine der wichtigen Ungleichungen der Mathematik ist.

Mit $\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(x) dx$ ist auf dem Vektorraum $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ ein Skalarprodukt definiert (siehe auch [3], Bsp. 18.5.). Bzgl. der zugehörigen Norm ist dieser Raum dann zudem vollständig gemäß Def. 2.11, also alle Cauchy-Folgen konvergieren. Vollständige $\mathbb{C}$ -Vektorräume mit einem Skalarprodukt, das die Norm induziert, nennt man auch *Hilbert-Räume*.

Satz 3.3. Jede 2π -periodische, stetige Funktion f lässt sich als konvergente Fourier-Reihe darstellen,

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds,$$

wobei es sich um Konvergenz im Mittel handelt, also Konvergenz bezüglich $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot | \cdot \rangle}$.

Bemerkung 3.4. Dies ist ein sehr schöner Konvergenzbegriff, welcher systematischer als punktweise Konvergenz und effizienter als gleichmäßige Konvergenz ist. Zu beachten ist jedoch, dass nicht überall punktweise Konvergenz vorliegen muss.

Jetzt zeigt sich noch ein Schönheitsfehler: Bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ ist der Raum der stetigen Funktionen $C^0([0, 2\pi], \langle \cdot | \cdot \rangle)$ nicht vollständig. Das heißt, dass der Limes einer im Mittel konvergenten Folge von Funktionen aus $C^0([0, 2\pi], \langle \cdot | \cdot \rangle)$ selbst nicht wieder in diesem Raum liegen muss. Man betrachte z.B. eine Funktionen-Folge f_n , welche wie folgt aussieht:

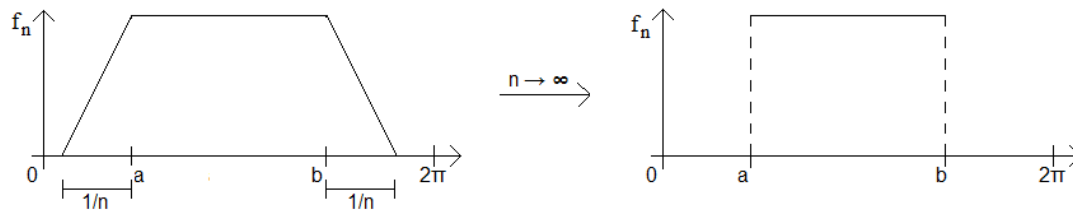


Abbildung 7: Skizze zum Schönheitsfehler der Unvollständigkeit.

Dann ergibt sich, dass der Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ nicht stetig ist. Eine elegante Lösung dieses Problems, die zugleich eine wichtige Klasse vollständiger Räume liefert, basiert auf dem Integralbegriff von *Lebesgue*. Die übliche Betrachtungsweise eines Integrals nach

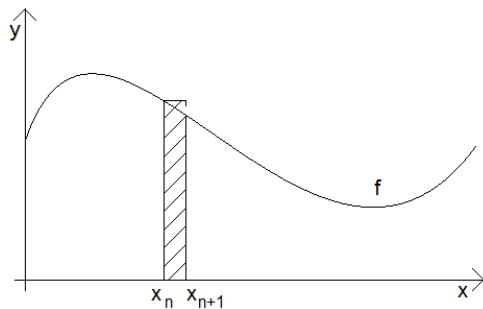


Abbildung 8: Skizze zum klassischen Riemann-Integral. Approximation von f durch Rechtecke entlang der x -Achse.

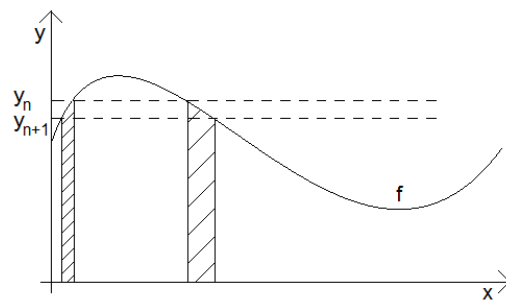


Abbildung 9: Skizze zum Integral nach Lebesgue. Approximation von f durch Rechtecke mit Auswahl entlang der y -Achse.

Riemann ist in Abbildung 8 zu sehen. Es werden sehr schmale Rechtecke zwischen zwei nah aneinander liegenden x -Werten mit Hilfe der entsprechenden Funktionswerte aufsummiert. Für verschwindend kleine Rechtecke erhält man das Integral der Funktion. Nach Lebesgue wird diese Technik zwar beibehalten, allerdings wird zwischen x - und y -Werten getauscht. Es wird also die Breite der Rechtecke anhand der Funktionswerte vorgegeben und mittels aller zugehörigen x -Werte ggfs. mehrere Rechtecke pro Intervall

berechnet. Damit ist der Raum

$$L^2([0, 2\pi], \langle \cdot | \cdot \rangle) = \left\{ f \mid \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \text{ ex. im Lebesgue-Sinne} \right\}$$

vollständig. Aber auch hier gibt es noch eine (kleine) Einschränkung. Gegeben sei die Funktion f (dargestellt in Abbildung 10)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 2\pi] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst auf } [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, stimmt f fast überall (im Sinne der Lebesgue-Theorie) mit $g \equiv 0$ überein, und die beiden Funktionen werden als gleich angesehen.

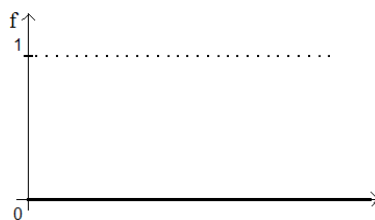


Abbildung 10: Skizze der Funktion f .

Dies spielt in der Praxis allerdings keine Rolle, da nie an einzelnen Punkten, sondern vielmehr auf sehr kleinen Intervallen mittellnd gemessen werden. Dies liegt an der endlichen Auflösung der Messgeräte.

Die Vektorräume, welche im Folgenden betrachtet werden, sehen folgendermaßen aus.

$$L^p([a, b], \mathbb{C}) := \left\{ f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \mid \int_a^b |f(x)|^p dx \text{ ex. im Lebesgue-Sinne} \right\}$$

für $1 \leq p < \infty$, und

$$L^\infty([a, b], \mathbb{C}) := \left\{ f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \mid \sup_x |f(x)| < \infty \right\}.$$

Dies sind stets Banach-Räume. Einige in diesem Skript besprochene Eigenschaften gelten auch für $1 \leq p < \infty$, dennoch ist nur für $p = 2$ der entsprechende Raum ein Hilbert-Raum. Hier ist die Norm durch das Skalarprodukt gegeben.

In einem Vektorraum ist eine Basis in der Regel sehr nützlich. In einem Hilbert-Raum ist es besonders hilfreich, eine Orthonormal-Basis zu haben.

Definition 3.5. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, mit Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Eine Menge an Vektoren $\{b_i \mid i \in I\}$ mit endlicher oder abzählbarer Indexmenge I heißt *Orthonormalsystem* (ONS), falls

$$\langle b_i | b_j \rangle = \delta_{ij}$$

für alle $i, j \in I$. Ein ONS heißt *maximal*, falls einzig das Nullelement orthogonal zu allen b_i des ONS ist.

Ist V ein Hilbert-Raum, so ist ein maximales ONS eine *Basis*, es kann also jedes Element von V als (konvergente) Linearkombination in den Elementen des ONS dargestellt werden. Insbesondere ist ein ONS eine Basis, wenn V endliche Dimension hat.

3.2 Die Gauß'sche Approximationsaufgabe

Es sei eine Funktion f gegeben, die Element eines Hilbert-Raums sei. Außerdem sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ ein ONS, aber nicht notwendig maximal. Insbesondere verlangen wir an dieser Stelle nicht, dass es sich um eine Basis handelt. Wir wollen nun $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ so bestimmen, dass

$$\left\| f - \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\| \stackrel{(!)}{=} \min.$$

Anders ausgedrückt: Wie kann man f also mit endlich vielen Termen am besten approximieren? Dies nennt man die *Gauß'sche Approximationsaufgabe*. Mit Hilfe der Vorarbeit zu Vektorräumen lässt sich diese Frage wie folgt beantworten.

Satz 3.6. *Die Gauß'sche Approximationsaufgabe wird eindeutig gelöst durch*

$$\alpha_\ell = \langle e_\ell | f \rangle, \quad \text{für } 1 \leq \ell \leq n,$$

und $f - \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell e_\ell$ steht senkrecht auf e_i für alle $1 \leq i \leq n$. Dabei gilt die Bessel'sche Ungleichung

$$\sum_{\ell=1}^n |\langle e_\ell | f \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Beweis. Wir beginnen mit einer einfachen Rechnung:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| f - \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell e_\ell \right\|^2 = \left\langle f - \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell e_\ell \left| f - \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell e_\ell \right\rangle \right. \\ &= \langle f | f \rangle - \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell \langle f | e_\ell \rangle - \sum_{\ell=1}^n \overline{\alpha_\ell} \langle e_\ell | f \rangle + \underbrace{\sum_{\ell=1}^n \sum_{\ell'=1}^n \overline{\alpha_\ell} \alpha_{\ell'} \langle e_\ell | e_{\ell'} \rangle}_{=\sum_{\ell=1}^n |\alpha_\ell|^2} \\ &\stackrel{\text{quadr. Erg.}}{=} \langle f | f \rangle + \underbrace{\sum_{\ell=1}^n |\langle e_\ell | f \rangle - \alpha_\ell|^2}_{\geq 0, \text{ einziger variabler Term}} - \sum_{\ell=1}^n |\langle e_\ell | f \rangle|^2. \end{aligned}$$

Der Abstand wird also genau dann minimal, wenn $\alpha_\ell = \langle e_\ell | f \rangle$ für alle $1 \leq \ell \leq n$ gilt. Damit folgt dann auch sofort die Bessel'sche Ungleichung.

Ist $z = f - \sum_{\ell=1}^n \langle e_\ell | f \rangle e_\ell$, so gilt

$$\langle e_m | z \rangle = \langle e_m | f \rangle - \sum_{\ell=1}^n \langle e_\ell | f \rangle \underbrace{\langle e_m | e_\ell \rangle}_{=\delta_{m,\ell}} = \langle e_m | f \rangle - \langle e_m | f \rangle = 0.$$

Damit ist auch die zweite Behauptung gezeigt. □

Es zeigt sich also, dass die beste Approximation an die Funktion f gegeben ist durch die Teilsummen der Fourier-Reihe, wobei mit ‘beste Approximation’ der Abstand bezüglich der L^2 -Norm gemeint ist.

Folgerung 3.7. *Es gilt die Bessel’sche Gleichung:*

$$\left\| f - \sum_{\ell=1}^n \langle e_\ell | f \rangle e_\ell \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{\ell=1}^n |\langle e_\ell | f \rangle|^2$$

wie sich direkt aus der Rechnung im obigen Beweis ergibt.

Nun können wir eine Erweiterung auf ein abzählbares ONS wie folgt formulieren.

Satz 3.8. *Sei V ein unendlich-dimensionaler komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt, und sei $\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ein ONS in V . Dann gilt:*

1. $\sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_\ell e_\ell$ ist Cauchy-Folge $\Leftrightarrow \sum_{\ell=1}^{\infty} |\alpha_\ell|^2$ konvergiert;
2. $f = \sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_\ell e_\ell \Rightarrow \alpha_\ell = \langle e_\ell | f \rangle$ für alle ℓ , und es liegt unbedingte Konvergenz vor;
3. $\sum_{\ell=1}^{\infty} \langle e_\ell | f \rangle e_\ell = f \Leftrightarrow \sum_{\ell=1}^{\infty} |\langle e_\ell | f \rangle|^2 = \|f\|^2$ (Parseval’sche Gleichung).

Beweis. Die 1. Behauptung folgt aus einer Rechnung, mit $1 \leq m \leq n$:

$$\left\| \sum_{\ell=m}^n \alpha_\ell e_\ell \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=m}^n \alpha_k e_k \left| \sum_{\ell=m}^n \alpha_\ell e_\ell \right. \right\rangle = \sum_{k,\ell=1}^n \overline{\alpha_k} \alpha_\ell \underbrace{\langle e_k | e_\ell \rangle}_{\delta_{k,\ell}} = \sum_{\ell=m}^n |\alpha_\ell|^2.$$

Für die 2. Behauptung: Sei $f_n = \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell e_\ell$ und $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|$. Dann ist

$$|\langle e_k | f_n \rangle - \langle e_k | f \rangle| = |\langle e_k | f_n - f \rangle| \leq \underbrace{\|e_k\|}_{=1} \cdot \|f_n - f\| = \underbrace{\|f_n - f\|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

Da aber $\langle e_k | f_n \rangle = \alpha_k$ für alle $n \geq k$ nach Satz 3.6, folgt die Formel für den Koeffizienten aus der Stetigkeit der Linearform $g \mapsto \langle e_k | g \rangle$. Die unbedingte Konvergenz stellen wir einen Moment zurück.

Die 3. Behauptung folgt nun sofort aus der Bessel’schen Gleichung.

Somit bleibt die ‘Umordnungsresistenz’ von der 2. Behauptung zu zeigen. Wir haben bisher gezeigt:

$$f = \sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_\ell e_\ell \Rightarrow f = \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle e_\ell | f \rangle e_\ell \Rightarrow \sum_{\ell=1}^{\infty} \underbrace{|\langle e_\ell | f \rangle|^2}_{\geq 0} \text{ konvergiert absolut.}$$

Daher können wir in der letzten Summe beliebig umordnen (was einer Umnummerierung der Elemente unseres ONS entspricht), ohne den Grenzwert zu ändern. Aus der 3. Behauptung, die wir ja schon bewiesen haben, folgt dann aber, dass $\sum_{\ell=1}^{\infty} \langle e_\ell | f \rangle e_\ell$ auch bei beliebiger Umordnung stets gegen f konvergiert. $\square$

3.3 Fourier-Reihen: Ergänzungen

Im Hinblick auf die weitere Entwicklung wollen wir eine neue Notation einführen.

Definition 3.9. Betrachte eine Funktion $f \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ mit periodischer Fortsetzung. Die Koeffizienten

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (24)$$

mit $n \in \mathbb{Z}$ heißen die *Fourier-Koeffizienten* von f .

Bemerkung 3.10. Wir halten kurz einige Eigenschaften fest:

- Die Fourier-Koeffizienten aus (24) sind wohl definiert wegen

$$|e^{-inx} f(x)| = |f(x)|,$$

weswegen auch $x \mapsto e^{-inx} f(x)$ eine L^1 -Funktion auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ ist.

- Die Fourier-Koeffizienten von f sind beschränkt, denn

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty.$$

- Die Abbildung $f \mapsto \widehat{f}$ ist linear, denn

$$(\alpha \widehat{f} + \beta \widehat{g})(n) = \alpha \widehat{f}(n) + \beta \widehat{g}(n)$$

gilt für alle $f, g \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Satz 3.11. (*Eindeutigkeitssatz*)

Gegeben seien zwei Funktionen $f, g \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ mit $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Dann folgt $f = g$ in L^1 . Dies bedeutet, dass $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in [-\pi, \pi]$ gilt.

Für die in Gl. (24) definierten Fourier-Koeffizienten gibt es allerdings noch ein Problem. Die Fourier-Reihe zu den Koeffizienten $\widehat{f}$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} \widehat{f}(n)$$

muss nämlich nicht konvergieren! Nach Kolmogorov (1926) existiert eine Funktion $f \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ dessen Fourier-Reihe nirgends konvergiert. Das ändert sich, wenn wir $f \in L^p([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ mit $p > 1$ betrachten. Zunächst gilt:

Satz 3.12. (*Carleson, 1966*)

Die Fourier-Reihe einer periodisch fortgesetzten L^2 -Funktion ist fast überall punktweise konvergent.

Bemerkung 3.13. Der Satz von Carleson klärt eine Vermutung von Lusin (1915). Hunt (1968) zeigte dann, dass sich dies auf Funktionen $f \in L^p([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ für $1 < p < \infty$ erweitern lässt.

Dabei ist der Begriff ‘fast überall auf $[a, b]$ ’ mathematisch präzise. Es bedeutet konkret, dass die Aussage überall außer auf einer Teilmenge vom Maß 0 gilt. Man beachte, dass nicht nur abzählbare Mengen vom Maß 0 sind, es gibt auch andere. Eine überabzählbare Ausnahmemenge ist z.B. die Cantor-Menge aus Beispiel 2.16.

Die Idee dieses Begriffs kann man sich auch mittels der Wahrscheinlichkeitstheorie näher bringen. Es gibt Ereignisse mit einer Wahrscheinlichkeit von 1, wie z.B. das Werfen von Kopf bei einem unendlich oft wiederholten Münzwurf. Man spricht davon, dass ‘fast immer’ irgendwann Kopf fallen wird.

Nun kommen wir zu einem sehr wichtigen Konzept.

Definition 3.14. Es seien $f, g \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Die Funktion $f * g$, die durch

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

definiert ist, heißt Faltung von f und g (dabei sind f, g für die Definition des Integrals als periodisch fortgesetzt gedacht).

Lemma 3.15. Es seien $f, g \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Dann existiert $(f * g)(t)$ für fast alle $t \in [-\pi, \pi]$, man hat $f * g \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, und es gelten folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} f * g &= g * f && (\text{kommutativ}) \\ (f * g) * h &= f * (g * h) && (\text{assoziativ}) \\ f * (\alpha g + \beta h) &= \alpha(f * g) + \beta(f * h) && (\text{linear}) \end{aligned}$$

für beliebige $f, g, h \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Beweis. siehe Übung. □

Die Faltung hat starke Konsequenzen:

Satz 3.16. (Faltungssatz)

Für beliebige $f, g \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ gilt $\widehat{(f * g)}(n) = \widehat{f}(n) \cdot \widehat{g}(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Dies folgt wieder aus einer kleinen Rechnung:

$$\begin{aligned} 4\pi^2 \widehat{(f * g)}(n) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) g(t - \tau) d\tau dt \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in(t-\tau)} g(t - \tau) dt}_{=\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int'} g(t') dt' = 2\pi \widehat{g}(n)} e^{-in\tau} f(\tau) d\tau \\ &= 2\pi \widehat{g}(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\tau} f(\tau) d\tau = 4\pi^2 \widehat{f}(n) \widehat{g}(n). \end{aligned}$$

Dabei wird im vorletzten Schritt die 2π -Periodizität von g verwendet, um nach einer Verschiebung um τ den Funktionswert an $t' \in [-\pi, \pi]$ zu berechnen. □

Beispiel 3.17. Ein einfaches Beispiel ist die Faltung der charakteristischen Funktion einer Menge mit sich selbst. Gegeben sei dazu

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Faltung $f * f$ kann nun in mehrere Bereiche aufgeteilt werden, wobei der Wert zwischen $-\pi \leq t \leq 0$ zunimmt und im Bereich $0 \leq t \leq \pi$ wieder abfällt. Das Ergebnis lautet:

$$(f * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} 0, & x \leq -\pi, \\ \pi + x, & -\pi < x \leq 0, \\ \pi - x, & 0 < x \leq \pi, \\ 0, & \pi < x. \end{cases}$$

Die zugehörige Rechnung sollte man selber einmal durchführen, um sich mit der Faltung vertraut zu machen. Der Vorfaktor $\frac{1}{2\pi}$ kommt von der oben gewählten Definition der Faltung.