

4 Fourier-Transformation

4.1 Von der Fourier-Reihe zur Fourier-Transformation

Bislang wurden Funktionen f betrachtet, die aus reinen Wellen zusammengesetzt sind, wie die Sinus- oder die Cosinus-Funktion. Dabei traten wegen der gewählten Periode von 2π nur Argumente der Form $2\pi kx$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ auf. Die jeweiligen Anteile der reinen Wellen an Funktion f können durch die Fourier-Koeffizienten dargestellt werden. Was passiert aber, wenn f aus ganz verschiedenen Wellen zusammengesetzt ist, die untereinander nicht in diesem Sinne vergleichbar sind?

Um die Fourier-Reihe weiter zu verallgemeinern, müssen zunächst andere Perioden betrachtet werden. Bislang war die Fourier-Reihe für 2π -periodische Funktionen definiert, also für Funktionen, die wir z.B. auf $[-\pi, \pi]$ definiert und dann auf ganz $\mathbb{R}$ periodisch fortgesetzt haben. Zunächst wird also ein allgemeineres Intervall $[-a, a]$ betrachtet, es soll also $f(x + 2a) = f(x)$ gelten. Aus Gl. (19) wird dann

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_n e^{inx \frac{\pi}{a}} \quad \text{mit} \quad \tilde{c}_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a e^{-inx \frac{\pi}{a}} f(x) dx$$

und es gilt wieder Konvergenz im L^2 -Sinne, hier für alle Funktionen aus $L^2([-a, a], \mathbb{C})$. Durch Umschreiben einiger Terme erhält man neue Funktionen:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{\Phi(n \frac{\pi}{a})}_{=\tilde{c}_n} e^{inx \frac{\pi}{a}} \quad \text{mit} \quad \Phi(n \frac{\pi}{a}) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a e^{-inx \frac{\pi}{a}} f(x) dx$$

Dies kann man nun folgendermaßen für eine Heuristik verwenden: Betrachtet man nun $a \rightarrow \infty$, wird aus $\Phi(n \frac{\pi}{a})$ fast eine kontinuierliche Funktion. Außerdem bleibt $\frac{1}{2a} f(x)$ bezüglich der Integration auf $[-a, a]$ etwa gleich groß. Die soll folgende Korrespondenz motivieren:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a} f(x) &\leadsto g(x), \quad \text{mit } g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \\ \Phi(n \frac{\pi}{a}) &\leadsto h(y), \end{aligned}$$

und man betrachtet

$$h(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} g(x) dx \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iyx} h(y) dy. \quad (25)$$

Proposition 4.1. *Ist $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cong L^1(\mathbb{R})$, so existiert die Abbildung h für alle $y \in \mathbb{R}$ und ist stetig. Dabei gilt:*

$$\|h\|_{\infty} = \sup_{y \in \mathbb{R}} |h(y)| \leq \|g\|_1 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx.$$

Außerdem gilt $\lim_{|y| \rightarrow \infty} h(y) = 0$.

Beweis. Für die erste Behauptung machen wir eine kleine Rechnung:

$$\|h\|_\infty = \sup_y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\left| \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} g(x) dx \right|}_{\leq \int_{\mathbb{R}} \underbrace{|e^{-ixy}|}_{=1} |g(x)| dx} \leq \|g\|_1.$$

Für den Beweis der zweiten Behauptung, die auch als *Riemann–Lebesgue-Lemma* bekannt ist, verweisen wir auf [5] oder [7]. $\square$

4.2 Fourier-Transformation

Nun wollen wir obige Heuristik präzise fassen. Wir tun dies gleich im $\mathbb{R}^n$, wobei dann $tx = \sum_i t_i x_i$ das Skalarprodukt zweier Vektoren bezeichnen soll.

Definition 4.2. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, also $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty$. Dann heißt

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-itx} f(x) dx$$

die *Fourier-Transformation* von f .

Zu beachten ist, dass diese Definition nicht einheitlich so verwendet wird. Es gibt verschiedene Anwendungen aus Mechanik, Mathematik etc. in denen der Vorfaktor vor dem Integral und der Faktor im Exponenten aus praktischen Erwägungen anders gewählt werden. Für unsere Formulierung gilt folgendes Resultat.

Satz 4.3. Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so existiert die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ gemäß Definition 4.2. Für beliebige $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{R}^n$ gelten dann die folgenden Eigenschaften:

1. $g(x) = f(x) e^{i\alpha x} \Rightarrow \hat{g}(t) = \hat{f}(t - \alpha)$
2. $g(x) = f(x - \alpha) \Rightarrow \hat{g}(t) = e^{-i\alpha t} \hat{f}(t)$
3. Ist $h = f * g$, so gilt der Faltungssatz, also $\hat{h} = \widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$, wobei die Faltung hier durch

$$(f * g)(t) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau) g(t - \tau) dx$$

definiert ist.

Beweis. Die Existenzaussage ist eine Folgerung von Proposition 4.1, die sich unmittelbar auf den n -dimensionalen Fall erweitert.

Für die erste Eigenschaft machen wir eine kleine Rechnung:

$$\begin{aligned} \hat{g}(t) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-itx} f(x) e^{i\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix(t-\alpha)} f(x) dx = \hat{f}(t - \alpha) \end{aligned}$$

Der Beweis für die zweite Eigenschaft verläuft analog.

Der Faltungssatz folgt aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned}
 \widehat{h}(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-itx} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) \frac{d^n y d^n x}{(2\pi)^n} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-it(x-y)} f(x-y) \frac{d^n x}{(2\pi)^{n/2}} e^{-ity} g(y) \frac{d^n y}{(2\pi)^{n/2}} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-itz} f(z) \frac{d^n z}{(2\pi)^{n/2}}}_{=\widehat{f}(t)} e^{-ity} g(y) \frac{d^n y}{(2\pi)^{n/2}} \\
 &= \widehat{f}(t) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ity} g(y) \frac{d^n y}{(2\pi)^{n/2}} = \widehat{f}(t) \cdot \widehat{g}(t).
 \end{aligned}$$

Dabei folgt die zweite Zeile aus dem Satz von Fubini, und die dritte Zeile ergibt sich mittels der Substitution $z = x - y$. $\square$

Beispiel 4.4. (Rechtecksfunktion)

Gegeben sei die (nicht-periodische) Rechtecksfunktion f durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \in [-a, a], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann bekommen wir

$$\begin{aligned}
 \widehat{f}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-itx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-1}{it} e^{-itx} \right]_{-a}^a \\
 &= \frac{-1}{it\sqrt{2\pi}} (e^{-ita} - e^{ita}) = \frac{2}{t\sqrt{2\pi}} \sin(ta)
 \end{aligned}$$

für die Fourier-Transformierte von f . Insbesondere ist $\widehat{f}(0) = 2a/\sqrt{2\pi}$, wie man entweder direkt oder mit der l'Hospital'schen Regel ausrechnen kann.

Nun wollen wir einige Eigenschaften der Fourier-Transformation festhalten. Natürlich ist sie wieder linear, aber wir bekommen auch folgende Resultate.

Satz 4.5. Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und sei $\lambda > 0$. Dann gilt:

1. $g(x) = \overline{f(-x)} \Rightarrow \widehat{g}(t) = \overline{\widehat{f}(t)}$;
2. $g(x) = f(\frac{x}{\lambda}) \Rightarrow \widehat{g}(t) = \lambda \widehat{f}(\lambda t)$.

Weiter gilt, falls g durch $g(x) = -i x_k f(x)$ definiert ist und ebenfalls eine L^1 -Funktion ist, dass $\widehat{f}$ partiell nach x_k differenzierbar ist mit der Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial t_k} \widehat{f}(t) = \widehat{g}(t)$$