

Der Beweis für die zweite Eigenschaft verläuft analog.

Der Faltungssatz folgt aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned}
 \widehat{h}(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-itx} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) \frac{d^n y d^n x}{(2\pi)^n} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-it(x-y)} f(x-y) \frac{d^n x}{(2\pi)^{n/2}} e^{-ity} g(y) \frac{d^n y}{(2\pi)^{n/2}} \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-itz} f(z) \frac{d^n z}{(2\pi)^{n/2}}}_{=\widehat{f}(t)} e^{-ity} g(y) \frac{d^n y}{(2\pi)^{n/2}} \\
 &= \widehat{f}(t) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ity} g(y) \frac{d^n y}{(2\pi)^{n/2}} = \widehat{f}(t) \cdot \widehat{g}(t).
 \end{aligned}$$

Dabei folgt die zweite Zeile aus dem Satz von Fubini, und die dritte Zeile ergibt sich mittels der Substitution $z = x - y$. $\square$

Beispiel 4.4. (Rechtecksfunktion)

Gegeben sei die (nicht-periodische) Rechtecksfunktion f durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \in [-a, a], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann bekommen wir

$$\begin{aligned}
 \widehat{f}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-itx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-1}{it} e^{-itx} \right]_{-a}^a \\
 &= \frac{-1}{it\sqrt{2\pi}} (e^{-ita} - e^{ita}) = \frac{2}{t\sqrt{2\pi}} \sin(ta)
 \end{aligned}$$

für die Fourier-Transformierte von f . Insbesondere ist $\widehat{f}(0) = 2a/\sqrt{2\pi}$, wie man entweder direkt oder mit der l'Hospital'schen Regel ausrechnen kann.

Nun wollen wir einige Eigenschaften der Fourier-Transformation festhalten. Natürlich ist sie wieder linear, aber wir bekommen auch folgende Resultate.

Satz 4.5. Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, und sei $\lambda > 0$. Dann gilt:

1. $g(x) = \overline{f(-x)} \Rightarrow \widehat{g}(t) = \overline{\widehat{f}(t)}$;
2. $g(x) = f(\frac{x}{\lambda}) \Rightarrow \widehat{g}(t) = \lambda \widehat{f}(\lambda t)$.

Weiter gilt, falls g durch $g(x) = -i x_k f(x)$ definiert ist und ebenfalls eine L^1 -Funktion ist, dass $\widehat{f}$ partiell nach x_k differenzierbar ist mit der Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial t_k} \widehat{f}(t) = \widehat{g}(t)$$

Beweis. Die ersten beiden Behauptungen ergeben sich analog zu früheren Aussagen durch direktes Nachrechnen (Übung!).

Mit $tx = t_1x_1 + \dots + t_nx_n$ bekommen wir für die partielle Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_k} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-itx} f(x) \, d^n x &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t_k} e^{-itx} \right)}_{= -ix_k e^{-itx}} f(x) \, d^n x \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(-ix_k) f(x)}_{= g(x)} e^{-itx} \, d^n x = \widehat{g}(t), \end{aligned}$$

woraus sich die letzte Behauptung ableiten lässt (man beachte noch die Bedingung an die Funktion g). $\square$

Als wichtiges Beispiel betrachten wir jetzt etwas ausführlicher die durch

$$f(x) = e^{-x^2/2}$$

definierte Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dann ist die Fourier-Transformierte $\widehat{f}$ durch

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} f(\xi) \, d\xi = e^{-t^2/2}$$

gegeben. Die Funktion f ist also eine Eigenfunktion zur Fourier-Transformierten zum Eigenwert 1, also ist $\widehat{\widehat{f}} = f$. Dies beweist man in der Regel mit Methoden der komplexen Analysis. Da uns das nicht zur Verfügung steht, setzen wir zum Nachweis den Satz von Picard–Lindelöf ein (siehe auch Kapitel 6.2).

Wir wollen also zeigen, dass f und $\widehat{f}$ dasselbe Anfangswertproblem lösen, nämlich

$$\frac{d}{dx} y(x) = -x y(x) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1. \quad (26)$$

Klarerweise wird dies von f erfüllt, wie man direkt nachrechnen kann. Für $\widehat{f}$ bekommen wir mittels einer analogen Rechnung zum letzten Schritt im Beweis von Satz 4.5 und dem Einsatz von partieller Integration:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \widehat{f}(x) &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(\xi) \, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial}{\partial x} e^{-ix\xi} \right) f(\xi) \, d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-i\xi e^{-ix\xi}) f(\xi) \, d\xi = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} (-\xi f(\xi)) \, d\xi \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \left(\frac{d}{d\xi} f(\xi) \right) \, d\xi \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} [e^{-ix\xi} f(\xi)]_{-\infty}^{\infty} - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-ix e^{-ix\xi}) f(\xi) \, d\xi \\ &= 0 - \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(\xi) \, d\xi = -x \widehat{f}(x), \end{aligned}$$

und damit erfüllt auch $\widehat{f}$ die DGL aus Gl. (26). Unsere Behauptung stimmt also, wenn wir noch die Anfangsbedingung für $\widehat{f}$ verifizieren können.

Dazu bemerken wir, dass

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy,$$

mittels der Substitution $x = \sqrt{2}y$ im zweiten Schritt. Unsere Behauptung folgt nun aus folgendem Resultat.

Lemma 4.6. *Es gilt:*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

Beweis. Da es keine einfache Stammfunktion von f gibt, behelfen wir uns mit einem weiteren Trick, indem wir das Quadrat von I berechnen:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\varphi dr = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \\ &\stackrel{s=r^2}{=} \pi \int_0^{\infty} e^{-s} ds = \pi \end{aligned}$$

Dabei entsteht die zweite Zeile durch eine Transformation auf *Polarkoordinaten*, also durch die Substitution $x = r \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\varphi)$. Dies führt auf

$$dx dy = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{vmatrix} dr d\varphi = r dr d\varphi.$$

Da klarerweise $I > 0$ gelten muss, folgt aus $I^2 = \pi$ nun $I = \sqrt{\pi}$ wie behauptet. $\square$

Nun wollen wir der Frage nachgehen, ob bzw. wann die Ausgangsfunktion f aus der Fourier-Transformierten $\widehat{f}$ berechenbar ist. Gesucht ist also eine inverse Abbildung zur Fourier-Transformation. Dabei wird zunächst ein formaler und nicht ganz korrekter Ansatz verfolgt. Falls auch $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definieren wir eine Funktion g durch

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{itx} \widehat{f}(t) d^n t.$$

Dies geschieht in Analogie zu unseren früheren Formeln. Dann sollte gelten (heuristisch):

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{it(x-y)} f(y) d^n y d^n t \\ &\stackrel{(?)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{it(x-y)} d^n t \right)}_{=\delta(x-y)} f(y) d^n y = (\delta * f)(x) \stackrel{(?)}{=} f(x), \end{aligned}$$