

wobei $*$ hier für die Faltung *ohne* den in Satz 4.3 verwendeten Vorfaktor steht. Dabei sollte δ eine Funktion sein, die bzgl. der Faltung das neutrale Element ist. Das erste (?) deutet an, dass es so eine Funktion in $L^1(\mathbb{R}^n)$ nicht gibt, und wir also nicht wissen, ob und wie man die Rechnung noch ‘retten’ kann, um das zweite (?) zu rechtfertigen.

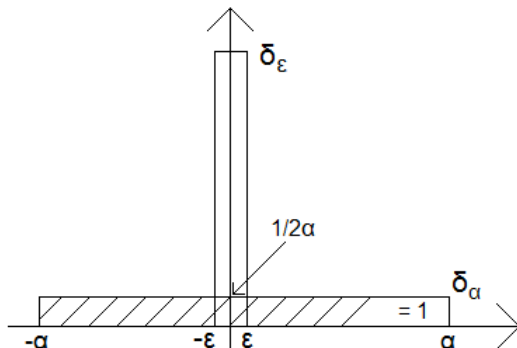


Abbildung 11: Illustration der Familie δ_ϵ mit Parameter $\epsilon > 0$, als Beispiel fuer eine approximierende Eins.

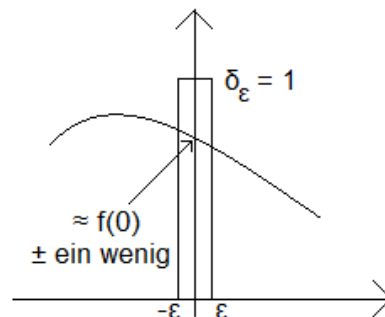


Abbildung 12: Approximation des Funktionswerts $f(0)$ durch das Integral.

Wir suchen also eine (symmetrische) ‘Funktion’ δ mit der Eigenschaft

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x) f(x) dx = f(0), \quad \text{für jede in 0 stetige Funktion } f.$$

Eine solche Funktion gibt es aber nicht. Man kann aber eine Familie von Funktionen finden, die von einem Parameter abhängt, die dann in einer kleinen ϵ -Umgebung von 0 den Funktionswert $f(0)$ immer besser ‘herausholt’. Sei dazu $\delta_\epsilon = \frac{1}{2\epsilon} 1_{[-\epsilon, \epsilon]}$, vgl. Abb. 11 für eine Illustration. Dafür gelten folgende Eigenschaften ($\epsilon > 0$):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \delta_\epsilon(x) dx &= 1, \\ \int_{\mathbb{R}} \delta_\epsilon(x) f(x) dx &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{f(x)}{2\epsilon} dx, \\ f \text{ stetig bei } 0 &\Rightarrow \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} \delta_\epsilon(x) f(x) dx = f(0). \end{aligned}$$

Man beachte, dass man bei der letzten Eigenschaft Integral und Limes *nicht* vertauschen kann! Die Abbildungen 11 und 12 illustrieren die Eigenschaften. Man erhält durch sauberen Umgang mit solchen Familien $(\delta_\epsilon)_{\epsilon>0}$ (auch *approximierende Eins* genannt) folgenden Satz (hier ohne Beweis):

Satz 4.7. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft dass auch $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt, und sei g durch

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{itx} \hat{f}(t) d^n t$$

definiert. Dann ist g stetig und es gilt $g(x) = f(x)$ fast überall. Also ist die Funktion g in L^1 -Sinne die inverse Fourier-Transformierte von $\hat{f}$.

Zu beachten ist hier, dass $\hat{f}$ integrierbar eine starke Einschränkung ist, die *nicht* für jedes $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ erfüllt ist.

Folgerung 4.8. (Eindeutigkeitssatz)

Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f} = 0$, also $\hat{f}(t) = 0$ für fast alle $t \in \mathbb{R}^n$, dann ist auch $f = 0$, also $f(x) = 0$ fast überall.

Beweis. Die Funktion $\hat{f}$ ist nach Voraussetzung integrierbar. Wir können also die Funktion g aus Satz 4.7 definieren, und bekommen $g(x) = 0$ für alle (!) x . Dann folgt $f = g$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, das heisst $f(x) = g(x) = 0$ fast überall. $\square$

Man kann die Fourier-Transformation in verschiedenen Räumen betrachten, jeweils mit anderen Gegebenheiten. Weit verbreitet sind:

- Schwartz-Raum: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (Raum der unendlich schönen Funktionen)
Für $n = 1$: C^∞ , $f^{(n)}(x)P(x) \xrightarrow{x \pm \infty} 0$ für jedes $n \geq 0$ und jedes Polynom P (z.B. $f(x) = e^{-x^2/2}$). Diese Funktionen sind also beliebig oft differenzierbar und verschwinden für sehr große bzw. kleine x -Werte ‘sehr schnell’.
- Temperierte Distributionen: $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
 $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ linear und stetig (z.B. $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$). Die Fourier-Transformation ist dann mittels $\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi})$ definiert.
- Hilbert-Raum: $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n) = \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx < \infty\}$
Hier wird vieles wieder systematisch und besonders schön.

4.3 Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R})$

Wir wollen jetzt die Fourier-Transformation auf dem Hilbert-Raum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ genauer studieren. Wir beschränken uns auf den eindimensionalen Fall, die Erweiterung auf den $\mathbb{R}^n$ kann dann analog behandelt werden. Wir wählen in $\mathcal{H}$ das Skalarprodukt

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x) dx$$

und die Norm entsprechend als $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f | f \rangle}$. Als Hilbert-Raum ist $\mathcal{H}$ vollständig, also konvergieren alle Cauchy-Folgen in $L^2(\mathbb{R})$.

Der Raum $\mathcal{H}$ ist natürlich ∞ -dimensional, und die Einheitskugel des Raums ist *nicht* kompakt. Zum Beispiel sieht man, dass $x \mapsto x^n e^{-x^2/2}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine Funktion in $\mathcal{H}$ definiert. Diese sind aber linear unabhängig, denn für jede endliche Folge (α_n) komplexer Zahlen gilt:

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n x^n e^{-x^2/2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{alle } \alpha_n = 0.$$