5 Diskrete Fourier-Transformation

Ziel der diskreten Fourier-Transformation ist es nun, eine numerische Berechnung einer Fourier-Transformation oder auch vergleichbarer Integrale zu ermöglichen. Die Idee ist vergleichbar mit dem Riemann'schen Integralbegriff. Betrachte dazu Abbildung 13. Dabei wird die Funktion f in kleinere Abschnitte aufgeteilt, um diskret arbeiten zu können.

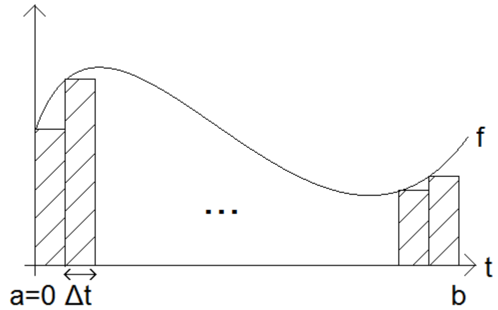

Abbildung 13: Idee der numerischen Berechnung der Fourier-Transformation einer Funktion. Die Idee folgt dabei dem Integralbegriff von Riemann.

Nun lässt sich die Funktion

$$\Phi(\omega) \;=\; \int_0^b \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

durch die Summe der diskreten Berechnungen der einzelnen Abschnitte approximieren:

$$\Phi(\omega) \;\approx\; \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_k}\,\triangle t \quad \text{mit} \quad t_k = k\,\frac{b}{N} = k\,\triangle t.$$

Bei günstigen Voraussetzungen seitens der Funktion f wird der Fehler der Approximation klein, wenn $\triangle t \searrow 0$. Betrachtet man weiter nur Frequenzen $\omega_n = \frac{2\pi n}{b}$ für $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\Phi(\omega_n) \;=\; \triangle t \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{2\pi nk}{N}}}_{=\,d_n}. \tag{27}$$

Mit Hilfe der Approximation aus Gl. (27) für einzelne Frequenzen lässt sich nun die diskrete Fourier-Transformation folgendermaßen beschreiben. Für einen gegebenen Datensatz $\{f(t_0), f(t_1), ..., f(t_{N-1})\}$ erhält man den neuen Datensatz $\{d_0, d_1, ..., d_{N-1}\}$ durch eine lineare und invertierbare Transformation, welche später durch die sogenannte schnelle Fourier-Transformation effizient berechnet werden kann.

Dazu betrachten wir f nun als eine Funktion $f\colon C_N \longrightarrow \mathbb{C}$ mit der zyklischen Gruppe C_N. Letztere schreiben wir als $C_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ mit Addition modulo N. Parallel betrachten wir f auch als N-Tupel komplexer Zahlen, also $f = \{f_0, f_1, ..., f_{N-1}\}$. Dabei stellen wir uns vor, dass sich der Ursprung der Werte aus $f_i = f(t_i)$ mit $0 \le i \le N-1$ ableitet. Die beiden Darstellungsweisen sind äquivalent, aber es ist nützlich, beide parallel einzusetzen.

Auf der endlichen abelschen Gruppe C_N können wir eine 'Intregration' über eine beliebige Teilmenge $A \subseteq C_N$ definieren, nämlich einfach die Summation

$$\int_A f \;:=\; \sum_{i \in A} f(i)\,.$$

Damit ist dann *jede* Funktion auf C_N integrabel, und wir haben auch

$$L^1(C_N) \;=\; L^2(C_N) \;\simeq\; \mathbb{C}^N.$$

Insbesondere können wir hier also immer im Hilbert-Raum arbeiten, wobei wir den $\mathbb{C}^N$ mit dem Standard-Skalarprodukt ausstatten, also

$$\langle\, f \,|\, g \,\rangle \;:=\; \sum_{k=0}^{N-1} \overline{f_k}\, g_k\,.$$

Definition 5.1. (diskrete Fourier-Transformation)
Die diskrete Fourier-Transformation (DFT) Df einer Funktion $f\colon C_N \longrightarrow \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$(Df)(n) \;=\; \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\, kn/N}, \qquad \text{für } n \in C_N\,. \tag{28}$$

Die Transformation Df lässt sich auch in eine Matrix-Schreibweise bringen. Diese ist später wichtig für die effiziente Berechnung und wird daher an dieser Stelle eingeführt. Bezeichnet $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/N}$ eine primitive N-te Einheitzwurzel, und $\overline{\omega} = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/N}$ ihre Inverse (bzgl. der Multiplikation), so definieren wir noch die Basis-Funktionen $\omega_j\colon C_N \longrightarrow \mathbb{C}$ durch $m \mapsto \omega_j(m) = \overline{\omega}^{jm}$ für $j, m \in C_N$.

Die Matrix-Schreibweise der DFT kann folgendermaßen notiert werden:

$$Df \;=\; \begin{pmatrix} (Df)(0) \\ \vdots \\ (Df)(N-1) \end{pmatrix} \;=\; M_N \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

mit

$$M_N \;:=\; \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \overline{\omega} & \overline{\omega}^2 & \cdots & \overline{\omega}^{N-1} \\ 1 & \overline{\omega}^2 & \overline{\omega}^4 & \cdots & \overline{\omega}^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \overline{\omega}^{N-1} & \overline{\omega}^{2(N-1)} & \cdots & \overline{\omega}^{(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Lemma 5.2. *Sei $N \ge 2$ und $\xi = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\, k/N}$ mit $1 \le k \le N-1$. Dann ist*

$$1 + \xi + \xi^2 + \ldots + \xi^{N-1} \;=\; 0\,.$$

Beweis. Unter den gewählten Voraussetzungen ist $\xi \neq 1$, und wir können die Summenformel fuer die endliche geometrische Reihe einsetzen, also

$$1 + \xi + \xi^2 + ... + \xi^{N-1} \;=\; \frac{1-\xi^N}{1-\xi} \;=\; \frac{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,k}}{1-\xi} \;=\; 0,$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,k} = 1$ gilt. □

Auch wenn der $L^2(C_N) \simeq \mathbb{C}^N$ der DFT deutlich einfacher ist als unsere früheren Räume, ist es dennoch sinnvoll, eine ONB zu kennen. Diese ist durch die bisherige Vorarbeit leicht zu bestimmen:

Lemma 5.3. *Sei $N \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Für die Funktionen ω_j mit $j \in C_N$ gilt dann*

$$\left\langle \frac{\omega_j}{\sqrt{N}} \,\middle|\, \frac{\omega_k}{\sqrt{N}} \right\rangle \;=\; \delta_{j,k}$$

für beliebige $j, k \in C_N$. Insbesondere ist dann $\left\{ \frac{\omega_j}{\sqrt{N}} \,\middle|\, j \in C_N \right\}$ eine ONB von $L^2(C_N)$.

Beweis. Dies können wir einfach nachrechnen:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\omega_j}{\sqrt{N}} \,\middle|\, \frac{\omega_k}{\sqrt{N}} \right\rangle \;&=\; \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} \overline{\omega_j(\ell)}\,\omega_k(\ell) \;=\; \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} \overline{\overline{\omega}^{j\ell}}\,\overline{\omega}^{k\ell} \\ &=\; \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} \overline{\omega}^{(k-j)\ell} \;=\; \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} \omega^{(j-k)\ell} \;=\; \begin{cases} 0, & \text{falls } j \neq k, \\ 1, & \text{falls } j = k, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt das Ergebnis von Lemma 5.2 eingesetzt haben. Die Basiseigenschaft ist nun klar, da wir N linear unabhängige Funktionen in $L^2(C_N)$ haben, der ein komplexer Vektorraum die Dimension N hat. □

Beispiel 5.4. Ein kurzes Beispiel soll die Idee der Matrix-Form verdeutlichen. Dabei ist die Matrix M_N für $N = 2$ wegen $\mathrm{e}^{\frac{-2\pi\mathrm{i}}{2}} = -1$ gerade gegeben durch

$$M_2 \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt für zwei beliebige Daten $f(0)$ und $f(1)$ die DFT

$$\begin{pmatrix} (Df)(0) \\ (Df)(1) \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} f(0)+f(1) \\ f(0)-f(1) \end{pmatrix}.$$

Lemma 5.5. *Die Matrix M_N ist unitär, für jedes $N \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Da M_N eine symmetrische Matrix ist, folgt Unitarität, wenn wir $M_N\,\overline{M_N} = \mathbb{1}$ nachrechnen. Wegen

$$M_N\,\overline{M_N} \;=\; \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \overline{\omega} & \cdots & \overline{\omega}^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \overline{\omega}^{N-1} & \cdots & \overline{\omega}^{(N-1)^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \cdots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

bekommen wir offenbar für das Matrixelement auf Position (j,k) den Ausdruck

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\overline{\omega}^{jn}\,\omega^{kn} \;=\; \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,(k-j)n/N} \;=\; \delta_{jk}\,,$$

woraus unsere Behauptung folgt. □

Nun kommen wir zur Umkehrung der DFT.

Satz 5.6. *(Inverse der DFT)*
Sei $N\in\mathbb{N}$, $f\colon C_N \longrightarrow \mathbb{C}$ und $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/N}$. Mit der diskreten Fourier-Transformation Df gemäß Gl. (28) gilt

$$f(n) \;=\; \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}(Df)(k)\,\underbrace{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,kn/N}}_{=\,\omega^{kn}}$$

für alle $n\in C_N$.

Beweis. Das rechnen wir wieder nach:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}(Df)(k)\,\omega^{kn} \;&=\; \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}f(j)\,\overline{\omega}^{jk}\,\omega^{kn} \;=\; \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}f(j)\,\omega^{(n-j)k}\\
&=\; \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}f(j)\;\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1}\omega^{(n-j)k}}_{=\,N\delta_{nj}\quad\text{(vgl. Lemma 5.3)}} \;=\; f(n)\,,
\end{aligned}$$

was für beliebiges $n\in C_N$ stimmt. □

Satz 5.6 kann man ebenfalls (und letztlich eleganter) mit der Matrix-Form der DFT herleiten. Dafür muss nämlich lediglich die Gleichung $M_N\,f = Df$ mit $\overline{M}_N$ multipliziert werden, und es ergibt sich

$$\underbrace{\overline{M}_N\,M_N}_{=\mathbb{1}}\,f \;=\; \overline{M}_N(Df)\,,$$

was im Grunde eine Anwendung der Unitarität von M_N ist.

Bemerkung 5.7. Wir wissen aus Lemma 5.5, dass die DFT eine unitäre Abbildung ist. Dies ist für $M_1 = 1$ natürlich trivial. Man kann nun (für $N\geq 2$) nachrechnen, dass

$$(M_N)^2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

N	$\lambda = 1$	$\lambda = \mathrm{i}$	$\lambda = -1$	$\lambda = -\mathrm{i}$
$4m$	$m+1$	$m-1$	m	m
$4m+1$	$m+1$	m	m	m
$4m+2$	$m+1$	m	$m+1$	m
$4m+3$	$m+1$	m	$m+1$	$m+1$

Tabelle 1: Die Eigenwerte von M_N und ihre Vielfachheiten.

gilt. Die Rechnung ist analog zu vielen der obigen Rechnungen (Übung). Daraus folgt nun $(M_N)^4 = \mathbb{1}$, wobei man auch leicht nachprüft, dass 4 für $N \geq 3$ die minimale (positive) Potenz mit dieser Eigenschaft ist, während für $N = 2$ bereits $(M_2)^2 = \mathbb{1}$ gilt.

Die möglichen Eigenwerte der DFT sind ± 1 und $\pm \mathrm{i}$, wobei ab $N = 5$ alle vorkommen. Diese waren, zusammen mit ihren Vielfachheiten, bereits Gauß bekannt. Sie weisen eine Struktur modulo 4 auf und sind in Tabelle 1 zusammengefasst.

Allerdings sind die Eigenvektoren der DFT nicht in geschlossener Form bekannt.

Auch im diskreten Bereich spielt die Faltung wieder eine wichtige Rolle.

Definition 5.8. (diskrete Faltung)
Die diskrete Faltung $f * g$ von $f, g \in L^1(C_N)$ ist für jedes $k \in C_N$ definiert durch

$$(f * g)(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f(j)\, g(k-j)\,,$$

wobei die Argumente wieder modulo N berechnet werden.

Das folgende Resultat überrascht uns dann nicht mehr:

Satz 5.9. *(Faltungssatz)*
Für beliebige $f, g \in L^1(C_N)$ gilt $D(f * g) = (Df) \cdot (Dg)$.

Beweis. Wir rechnen das für ein beliebiges $n \in C_N$ nach:

$$\begin{aligned}
D(f*g)(n) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} (f*g)(k)\, \overline{\omega}^{kn} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f(j)\, g(k-j)\, \overline{\omega}^{kn} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f(j)\, \overline{\omega}^{jn} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} g(k-j)\, \overline{\omega}^{(k-j)n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f(j)\, \overline{\omega}^{jn} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=0}^{N-1} g(\ell)\, \overline{\omega}^{\ell n} \\
&= (Df)(n) \cdot (Dg)(n)\,,
\end{aligned}$$

wobei der vorletzte Schritt durch eine Umsummierung entsteht, die wir durchfüren können, weil die Argumente ja Elemente der Gruppe (!) C_N sind. □

Für die weiteren Abschnitte führen wir zunächst noch zwei neue Bezeichnungen ein, die auch in der Literatur weit verbreitet sind, nämlich

$$d_k = \mathcal{F}_k(f) = (Df)(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \frac{kj}{N}} f_j \,.$$

Dies bedeutet nur, dass wir die parallele Verwendung von Abbildungen und Vektoren jetzt ‘ernst’ nehmen.

5.1 Trigonometrische Interpolationsapproximation

Bislang ging es bei der DFT in erster Linie um die Approximation der Fourier-Transformation von Funktionen bzw. um die Transformation eines endlichen Datensatzes. Jetzt wollen wir uns ein wenig mit der Frage befassen, wie wir die obigen Resultate für die Approximation einer Funktion f auf einem Interval $[0, L]$ mittels Interpolation einsetzen können. Dabei ist ein trigonometrisches Polynom p auf $[0, L]$ gesucht, so dass für eine gegebene Menge an Punkten $\{(x_0, f_0), ..., (x_{N-1}, f_{N-1})\}$ mit (festem) $N \in \mathbb{N}$ die Gleichung $p(x_j) = f_j$ für alle $0 \le j \le N-1$ gilt. Außerdem soll natürlich p auch sonst so nahe an f verlaufen wie möglich. Wir wollen hier nur den Fall äquidistanter Stützstellen betrachten, also $x_j = \frac{jL}{N}$ für $0 \le j \le N-1$, und außerdem noch annehmen, dass $f(0) = f(L)$ gilt.

Gesucht ist also ein trigonometrisches Polynom der Form

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} d_k \, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, kx/L}. \tag{29}$$

Die Aufgabe ist nun zunächst, die Zahlen d_k so zu wählen, dass alle Stützstellenbedingungen erfüllt sind. Danach wird zu sehen sein, ob sich damit im Rest des Intervalls eine befriedigende Approximation der Funktion f ergibt, oder ob wir den Ansatz noch geeignet modifizieren müssen.

Satz 5.10. *Sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Zu äquidistanten Stützstellen $x_j \in [0, L]$, also $x_j = \frac{jL}{N}$ für $0 \le j \le N-1$, und beliebigen Stützwerten $f_j \in \mathbb{C}$ besitzt das trigonometrische Polynom aus Gl.* (29) *die Interpolationseigenschaft $p(x_j) = f_j$ genau dann, wenn gilt:*

$$\begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_{N-1} \end{pmatrix} = M_N \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Beweis. Dies ist eine direkte Konsequenz des Inversionssates (Satz 5.6) für die DFT. □