

# Mathematische Methoden der Biowissenschaften III

Wintersemester 2024/2025

## Übungsblatt 12

(36) Sei  $D$  eine Diagonalmatrix. Berechnen Sie  $e^D$ .

Sei  $C$  eine diagonalisierbare Matrix, mit  $C = SDS^{-1}$ . Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$e^C = Se^DS^{-1}.$$

(1+2 Punkte)

(37) Berechnen Sie  $e^A$  für:

(a)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b)  $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

(1+2 Punkte)

Hinweis: Teil (a) ist die Vervollständigung eines Beispiels aus der Vorlesung. Für (b) schreiben Sie  $A$  in der Form  $A = D + N$ , mit  $D$  diagonal,  $N$  nilpotent und  $[D, N] = 0$ .

(38) Sei für jede reelle  $n \times n$  Matrix  $A$  die Funktion  $\|\cdot\|$  definiert durch

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

(a) Beweisen Sie, dass  $\|\cdot\|$  eine Matrixnorm definiert.

(b) Beweisen Sie, dass  $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$ .

(c) Beweisen Sie, dass  $\|Ax\| \leq \|x\| \|A\|$  für  $x \in \mathbb{R}^n$ .

(2+1+1 Punkte)

(37\*) Lösen Sie das AWP

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = x - y \end{cases} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

(3 Zusatzpunkte)

Abgabe bis Dienstag, 14.01.2024, 10 Uhr, beim Tutor!