Michael Baake

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Bielefeld, 15.01.2025

Mathematische Methoden der Biowissenschaften III

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 13

(38) Sei M eine Markov-Matrix mit Eigenwert 0. Kann es eine Matrix B mit $M = \mathrm{e}^B$ geben? Begründung?

Hinweis: Was ist $\det(M)$? **(2 Punkte)**

(39) Bestimmen Sie alle 2×2-Markov-Matrizen M, die idempotent sind, also $M^2 = M$ erfüllen. Welche hiervon sind einbettbar?

(2+1 Punkte)

(40) Eine Markov-Matrix M heißt *unendlich teilbar*, wenn zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine Markov-Matrix K existiert mit $K^m = M$ (also eine m-te Markov-Wurzel).

Zeigen Sie: Eine einbettbare Markov-Matrix ist automatisch unendlich teilbar. Bedeutung?

(2+1 Punkte)

(41) Eine Menge $\mathcal{M}$ von Matrizen heißt *konvex*, wenn für jedes Paar $A, B \in \mathcal{M}$ auch $\alpha A + (1-\alpha)B \in \mathcal{M}$ gilt, und zwar für alle $\alpha \in [0,1]$.

Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{M}_d$ der $d \times d$-Markov-Matrizen konvex ist.

(2 Punkte)

(42*) Ein Element M einer konvexen Menge $\mathcal{M}$ heißt *extremal*, wenn es nicht als Konvexkombination von zwei unterschiedlichen Elementen geschrieben werden kann, wenn also $M = \alpha \cdot A + (1-\alpha) \cdot B$ mit $A, B \in \mathcal{M}$ und $A \neq B$ nur mit $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$ möglich ist.

Bestimmen Sie alle extremalen Elemente von $\mathcal{M}_2$, der Menge der 2×2-Markov-Matrizen, und fertigen Sie eine Skizze der Situation an.

(3 Zusatzpunkte)

Abgabe bis Dienstag, 21.01.2025, 10 Uhr, elektronisch beim Tutor!