Michael Baake

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Bielefeld, 22.01.2025

Mathematische Methoden der Biowissenschaften III

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 14

(43) Es sei Q ein 2×2-Markov-Generator mit $e^Q = \mathbb{1}$. Zeigen Sie, dass dann $Q = 0$ sein muss.

(2 Punkte)

(44) Sei $M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ mit $a, b \geqslant 0$ und $0 < a + b < 1$. Wir vergleichen dies (vgl. Vorlesung) mit

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \psi(t) & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \psi(t) \\ \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \psi(t) & 1 - \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \psi(t) \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha, \beta \geqslant 0$ mit $\alpha + \beta > 0$ gelten soll, und $\psi(t) = 1 - e^{-t(\alpha+\beta)}$ ist, für $0 < t < \infty$.

Zeigen Sie: Für jedes $t > 0$ gibt es genau eine Wahl von α, β, so dass $M = e^{tA}$ gilt.

(2 Punkte)

(45) Sei M eine einbettbare Markov-Matrix. Dann gilt $0 < \det(M) \leqslant 1$, und $\det(M) = 1$ tritt nur für $M = \mathbb{1}$ auf. Warum?

(2+1 Punkte)

(46) Berechnen Sie e^B für $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Hinweis: B ist nilpotent.

(2 Punkte)

Abgabe bis Dienstag, 28.01.2025, 10 Uhr, elektronisch beim Tutor!