Michael Baake

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Bielefeld, 16.10.2024

Mathematische Methoden der Biowissenschaften III

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 2

(3) Wir betrachten die Wellengleichung

$$c^2 u_{xx} = u_{tt}$$

und führen die neuen Variablen

$$\xi = x - ct, \qquad \eta = x + ct$$

ein.

(a) Führen Sie die Variablensubstitution durch, und drücken Sie u_{xx} und u_{tt} in Ableitungen von ξ und η aus.

(b) Transformieren Sie die Wellengleichung auf die neuen Variablen.

(c) Beweisen Sie damit, dass eine Funktion der Form

$$u(x,t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct) \tag{1}$$

die Wellengleichung löst, wenn φ und ψ zwei beliebige C^2-Funktionen sind.

(3+2+2 Punkte)

(4) Berechnen Sie die Fourierreihe des (periodischen) Rechteckssignals (für $k \in \mathbb{Z}$)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 2k \cdot \pi < x < (2k+1) \cdot \pi \\ 0 & \text{falls } x = k \cdot \pi \\ -1 & \text{falls } (2k+1) \cdot \pi < x < 2(k+1) \cdot \pi \end{cases}$$

Beachten Sie, dass

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x \qquad n \geq 0\,,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \qquad n \geq 1\,.$$

Bemerkung: Aus der Vorlesung wissen Sie bereits, dass die Fourier-Reihe die Gestalt $\sum_{n \geq 1} b_n \sin nx$ besitzt (d.h. die Koeffizienten der Kosinusterme sind alle gleich 0).

Begründen Sie, warum $a_n = 0$ für alle $n \geq 0$.

Zeichnen Sie (z.B. mit Maple oder Mathematica) die Graphen von der Summe $\sum_{n=1}^{N} b_n \sin nx$ für $N = 1, 2, 3$ und vergleichen Sie diese mit $f(x)$.

(4 Punkte)

(5) Berechnen Sie folgende Integrale, jeweils für $m, n \in \mathbb{N}$:

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\sin(mt)\mathrm{d}t$

(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\cos(mt)\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\sin(mt)\mathrm{d}t$

(2+2+2 Punkte)

Abgabe bis Dienstag, 22.10.2024, 10 Uhr, beim Tutor!