Mathematische Methoden der Biowissenschaften III

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 3

- (6) Mit $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ bezeichnen wir den Raum der stetigen, 2π -periodischen Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Für zwei Funktionen $f, g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ sei

$$\langle f|g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(x) dx.$$

- (a) Zeigen Sie: $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ist ein Skalarprodukt auf $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.
 (b) Zeigen Sie: Auf dem größeren Raum aller 2π -periodischen Funktionen gibt es Funktionen $f \neq 0$ mit $\langle f|f \rangle = 0$. **(2+2 Punkte)**

- (7) Sei $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ die Fourier-Reihe von $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Zeigen Sie:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_n(x-y) dy,$$

wobei

$$D_n(z) = \begin{cases} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})z)}{2 \sin(\frac{z}{2})}, & z \in \mathbb{R}, \frac{z}{2} \neq \ell\pi \ (\ell \in \mathbb{Z}) \\ n + \frac{1}{2}, & \frac{z}{2} = \ell\pi \ (\ell \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

den n -ten *Dirichlet-Kern* bezeichnet.

Beachten Sie dabei die folgenden trigonometrischen Formeln:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) &= \cos(\alpha - \beta) \\ 2 \sin(\alpha) \cos(\beta) &= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

Benutzen Sie insbesondere letztere, um

$$2 \sin\left(\frac{z}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kz)\right) = \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)z\right)$$

nachzuweisen. Zeigen Sie auch, dass D_n stetig ist.

(5 Punkte)

- (8) (a) Berechnen Sie (für $n \in \mathbb{N}$) die Stammfunktionen

$$\int x \cos(nx) dx \quad \text{und} \quad \int x \sin(nx) dx.$$

- (b) Berechnen Sie die Fourier-Reihe des (periodischen) Dreieckssignals $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$ für $x \in [-\pi, \pi]$, mit periodischer Fortsetzung.
- (c) Berechnen Sie die Fourier-Reihe des (periodischen) Sägezahnsignals $f(x) = x$ für $x \in (-\pi, \pi)$, $f(\pm\pi) = 0$, mit periodischer Fortsetzung.
- (d) Zeichnen Sie, wie in Aufgabe (3), jeweils die Graphen von

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

für $N = 1, 2, 3, 4, 5$ und vergleichen Sie diese mit $f(x)$. Beachten Sie insbesondere die Unstetigkeitsstelle des Sägezahns.

Hinweise: Beginnen Sie (b) und (c) mit einer Skizze von f . Überlegen Sie sich dann jeweils, welche Integrale aus Symmetriegründen klar sind und nicht berechnet werden müssen.

(2+2+2+2 Punkte)

Abgabe bis Dienstag, 29.10.2024, 10 Uhr, beim Tutor!