Mathematische Methoden der Biowissenschaften III

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 5

- (12) Erarbeiten Sie sich den Banach'schen Fixpunktsatz anhand des Skripts und des Stoffs aus der Ergänzungsstunde.

Wir berechnen hier die Lösung der transzendenten Gleichung $e^{-x/2} - x = 0$ auf 10 Nachkommastellen genau.

- (a) Zeigen Sie anhand einer Skizze, dass es genau eine Lösung gibt.
- (b) Schreiben Sie die Gleichung als Fixpunktgleichung, und weisen Sie nach, dass die zu iterierende Funktion auf $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ eine Kontraktion ist.
- (c) Berechnen Sie nun den Fixpunkt iterativ. Wieviele Iterationen sind bei Start von $x_0 = 0$ erforderlich? **(1+2+2 Punkte)**

- (13) Berechnen Sie die Binomialkoeffizienten modulo 2 in der Form des Pascal'schen Dreiecks, und erstellen Sie ein Bild der 512 ersten Zeilen (Punkt bzw. kein Punkt für 1 bzw. 0).

Welche Struktur deutet sich hier an? Machen Sie sich kundig, und ermitteln Sie die zugehörige fraktale Dimension (mit heuristischem Argument). **(2+2 Punkte)**

Hinweis: Das binäre Pascal-Dreieck lässt sich einfach rekursiv berechnen (wie?). Nutzen Sie dies für die Erstellung eines einfachen Programms für das Bild. Setzen Sie *keine* Programmpakete ein, die Sie nicht selber geschrieben haben.

- (14) (a) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Zeigen Sie: Ist $f \geq 0$ (d.h. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$), so gilt $|\widehat{f}(t)| \leq \widehat{f}(0)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

- (b) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte und $\widehat{f}(0)$ von

(i) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } a < x < b, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

- (ii) $f(x) = e^{-a|x|}$, wobei $a > 0$ sei. **(2+2 Punkte)**

Abgabe bis Dienstag, 12.11.2024, 10 Uhr, beim Tutor!