Michael Baake
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Bielefeld, 20.11.2024

Mathematische Methoden der Biowissenschaften III

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 7

(18) Wir wollen das Anfangswertproblem (AWP)

$$\dot{x}(t) = 2x(t) \qquad \text{mit} \qquad x(0) = 1$$

mittels Volterra-Iteration lösen. Dazu schreiben wir das Problem in Integralform um:

$$x(t) = 1 + 2\int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\tau\,.$$

Nun beginnen wir mit $x_0(t) = 1$ und iterieren

$$x_{n+1}(t) := 1 + 2\int_0^t x_n(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad \text{für} \quad n \geq 0\,.$$

(a) Berechnen Sie $x_n(t)$ für $1 \leq n \leq 3$.

(b) Formulieren Sie eine Vermutung für $x_n(t)$ und beweisen Sie diese dann ggf. mit vollständiger Induktion.

(c) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t)$$

und prüfen Sie nach, dass dies das AWP löst.

(d) Zeigen Sie explizit, dass die Lösung eindeutig ist.
Hinweis: Setzen Sie $z(t) = y(t)e^{-2t}$, nehmen Sie an, dass $y(t)$ das AWP löst, und weisen Sie nach, dass dann $z(t) \equiv 1$ gelten muss.

(2+2+2+2 Punkte)

(19) Betrachten Sie die stetige Version der logistischen Gleichung (in $\mathbb{R}$)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \lambda\, x(t)\big(1 - x(t)\big) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

mit $\lambda > 0$ und $x_0 \geq 0$.

(a) Beweisen Sie, dass Konstanten A und B existieren mit

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}\,.$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung der logistischen Gleichung.

(c) Was passiert mit der Lösung, wenn $t \to \infty$ für verschiedene Startwerte x_0?

(1+3+3 Punkte)

(20) Betrachten Sie die diskrete Version der logistischen Gleichung (in $\mathbb{R}$)

$$\begin{cases} x_{n+1} &= (1+\lambda)x_n(1-x_n) \\ x_0 &= Q \end{cases}$$

mit $0 < \lambda < 1$ und $0 < x_0 < \frac{\lambda}{1+\lambda}$.

(a) Beweisen Sie, dass die diskrete logistische Gleichung genau zwei Fixpunkte hat (für diese Bedingungen).

(b) Beweisen Sie, dass

$$0 < x_n < \frac{\lambda}{1+\lambda}$$

für $n \geq 0$.

(c) Beweisen Sie, dass die Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ monoton wachsend ist.

(d) Beweisen Sie, dass die Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ gegen $\frac{\lambda}{1+\lambda}$ konvergiert.

(1+2+2+2 Punkte)

Hinweis: Die diskrete logistische Gleichung verhält sich ansonsten viel komplexer als ihre stetige Variante aus Aufgabe 19.

Abgabe bis Dienstag, 26.11.2024, 10 Uhr, beim Tutor!