Matrixkondition

Christopher Daniel Southwick

17. Mai 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Betrachte das Gleichungssystem

$$Ax = b, \tag{1.1}$$

wobei $A \in M_n(K)$ invertierbar, $0 \neq b \in K^n$, $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $x \in K^n$ die gesuchte Lösung bezeichnet.
Frage: Wie stark verändert sich die Lösung x, wenn wir die Eingangsdaten A, b leicht stören?
Sei $\epsilon \geqslant 0$ (Störparameter), so definieren wir $B \in M_n(K)$ und $\gamma \in K^n$.

$$A_\epsilon := A + \epsilon B \in M_n(K) \quad \text{Störung von A} \tag{1.2}$$

$$b_\epsilon := b + \epsilon\gamma \in K^n \quad \text{Störung von B} \tag{1.3}$$

Betrachte nun

$$A_\epsilon x_\epsilon = b_\epsilon. \tag{1.4}$$

2 Matrixkondition

Definition 2.1. *Sei $A \in M_n(K)$ invertierbar mit zugeordneter Matrixnorm $\|\cdot\|$ und $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann heißt*

$$\mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

die Konditionszahl von A (bzgl. $\|\cdot\|$)

Satz 2.2. *Seien $A \in M_n(K)$ invertierbar, $0 \neq b \in K^n$, $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\epsilon \geqslant 0, A_\epsilon \in M_n(K)$ und $b_\epsilon \in K^n$ aus (2) für $B \in M_n(K)$, $\gamma \in K^n$ mit $\gamma_\epsilon := \epsilon\|A^{-1}\| \cdot \|B\| < 1$ und bezeichne $x \in K^n$ und $x_\epsilon \in K^n$ die Lösung von (1.1) und (1.3). Dann gilt*

$$\frac{\|x_\epsilon - x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{1}{1-\gamma_\epsilon}\mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(A)\cdot\left(\frac{\|b_\epsilon - b\|}{\|b\|} + \frac{\|A_\epsilon - A\|}{\|A\|}\right) = \frac{\epsilon}{1-\gamma_\epsilon}\mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(A)\cdot\left(\frac{\|\gamma\|}{\|b\|} + \frac{\|B\|}{\|A\|}\right).$$

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir das nachfolgende Lemma.

Lemma 2.3. *Banach-Lemma*
Sei $M \in M_n(K)$ invertierbar und $N \in M_n(K)$ mit $\gamma := \|M^{-1}\| \cdot \|N - M\| < 1$ für $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann gilt
i) N ist invertierbar,
ii) $\|N^{-1}\| \leqslant \dfrac{1}{1-\gamma}\|M^{-1}\|$.

Es folgt der Beweis von Satz 2.2

Beweis. Die Anwendung von Lemma 2.3 auf $M := A_\epsilon$ mit $\gamma_\epsilon := \epsilon\|A^{-1}\| \cdot \|B\| < 1$ für ein $\epsilon \geqslant 0$ liefert:

$$A_\epsilon \text{ ist invertierbar und } \|A_\epsilon^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\gamma_\epsilon}\|A_\epsilon - A\| \tag{2.1}$$

Damit besitzt das LGS (1.3) eine eindeutige Lösung $x_\epsilon \in K^n$. Seien x und x_ϵ Lösungen von (1.1) und (1.3), so gilt

$$b_\epsilon = A_\epsilon x_\epsilon = A_\epsilon x_\epsilon - A_\epsilon x + A_\epsilon x - Ax + Ax = A_\epsilon(x_\epsilon - x) + (A_\epsilon - A)x + b,$$

also

$$A_\epsilon(x_\epsilon - x) = (b_\epsilon - b) - (A_\epsilon - A)x.$$

Somit, da A invertierbar, folgt

$$x_\epsilon - x = A_\epsilon^{-1}\left[(b_\epsilon - b) - (A_\epsilon - A)x\right].$$

Aus (1.4) erhalten wir nun die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|x_\epsilon - x\| &\leqslant \|A_\epsilon^{-1}\|(\|b_\epsilon - b\| + \|A_\epsilon - A\|\|x\|) \\
&\leqslant \frac{1}{1-\gamma}\|A^{-1}\|(\|b_\epsilon - b\| + \|A_\epsilon - A\|\|x\|) \\
&= \frac{1}{1-\gamma}\mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(A)(\frac{\|b_\epsilon - b\|}{\|A\|} + \frac{\|A_\epsilon - A\|}{\|A\|}\|x\|).
\end{aligned}$$

Division durch $\|x\|$ liefert ($Ax = b$ gilt, da $b \neq 0$, $\|b\| = \|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\|$) also

$$\frac{1}{\|A\|\|x\|} \leqslant \frac{1}{b}.$$

Für den relativen Fehler erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\|x_\epsilon - x\|}{\|x\|} &\leqslant \frac{1}{1-\gamma}\mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(A)(\frac{\|b_\epsilon - b\|}{\|A\|\|x\|} + \frac{\|A_\epsilon - A\|}{\|A\|}) \\
&\leqslant \frac{1}{1-\gamma}\mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(A)(\frac{\|b_\epsilon - b\|}{\|b\|} + \frac{\|A_\epsilon - A\|}{\|A\|}) \\
&= \frac{\epsilon}{1-\gamma}\mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(A)\frac{\|\gamma\|}{\|b\|} + \frac{\|B\|}{\|A\|}
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.4. *Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ invertierbar, dann gilt*
i) $\mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(A) = \mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(A^{-1})$,
ii) $\mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(\alpha A) = \mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(A)$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$,
iii) $\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_2}(A) = \dfrac{\rho_1(A)}{\rho_n(A)}$, *wobei $\rho_1(A)$ (bzw. $\rho_n(A)$) der größte (bzw. kleinste) Singulärwert von A ist,*
iv) ist A normal, so gilt

$$\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_2}(A) = \frac{|\lambda\max(A)|}{|\lambda\min(A)|} = \sigma(A)\sigma(A^{-1}).$$

Es bezeichnet $\sigma(A)$ den Spektralradius von A und $|\lambda\max(A)|$ (bzw. $|\lambda\min(A)|$) ist der betragsmäßig größte (bzw. kleinste) Eigenwert von A.
v) Ist $U \in M_n(\mathbb{C})$ unitär, so gilt

$$\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_2}(A) = 1$$

und

$$\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_2}(AU) = \mathrm{cond}_{\|\cdot\|_2}(UA) = \mathrm{cond}_{\|\cdot\|_2}(A).$$

Bemerkung 2.5. *i) Es gilt sogar (vergleich Proposition 2.4 (iv))*

$$\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_2}(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \geqslant \sigma(A)\sigma(A^{-1}), \tag{2.2}$$

denn $\sigma(B) \leqslant \|B\|$ *für alle* $B \in M_n(K)$.

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert mit zugehörigem Eigenvektor $v \in K^n$, $v \neq 0$ von $B \in M_n(K)$. Das heißt $Bv = \lambda v$, dann gilt

$$\|B\| := \sup_x \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \geqslant \frac{\|Bv\|}{\|v\|} = \frac{\|\lambda v\|}{\|v\|} = |\lambda|\frac{\|v\|}{\|v\|} = |\lambda|$$

für alle $\lambda \in \sigma(B)$.
Daraus folgt $\|B\| \geqslant \max_{\lambda\in\sigma(B)} |\lambda| =: \sigma(B)$.
Ist A normal, so liefert Proposition 2.4 (iv) und (2.2)

$$\mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(A) \geqslant \sigma(A)\sigma(A^{-1}) = \mathrm{cond}_{\|\cdot\|_2}(A).$$

□

ii) $A \in M_n(K)$ *invertierbar heißt* gut konditioniert *(bzgl.* $\|\cdot\|$*),*
falls $\mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(A) \approx 1$.
$A \in M_n(K)$ *invertierbar heißt* schlecht konditioniert *(bzgl.* $\|\cdot\|$*),*
falls $\mathrm{cond}_{\|\cdot\|}(A) > 1$.
Unitäre Matrixen sind immer gut konditioniert (vergleiche Proposition 2.4 (v)).
iii) Sei V *ein endlich dimensionaler Vektorraum über* K *und seien*
$\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b : V \to [0,\infty)$ *zwei Normen auf* V*, dann gilt:*
$\exists c_1, c_2 > 0 =: c_1\|v\|_a \leqslant \|v\|_a \leqslant c_2 v_b$ *für alle* $v \in V$*. Das heißt* $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ *sind äquivalent.*

Proposition 2.6. *Sei* $A \in M_n(K)$ *invertierbar mit zugeordneten Matrixnormen*
$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n (A_{i,j})$ *(Spaltensummen-Norm)*
$\|A\|_2 = \sqrt{\max(\lambda)}$, $\lambda \in \sigma(A^H A)$ *(Spektralnorm)*
$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n (A_{i,j})$ *(Zeilensummen-Norm).*

Definieren wir $\mathrm{cond_p} := \mathrm{cond}_{\|\cdot\|_p}(A)$*, so gilt*
i) $n^{-1}\mathrm{cond}_2(A) \leqslant \mathrm{cond}_1(A) \leqslant n\mathrm{cond}_2(A)$,
ii) $n^{-1}\mathrm{cond}_\infty(A) \leqslant \mathrm{cond}_2(A) \leqslant n\mathrm{cond}_\infty(A)$,
iii) $n^{-2}\mathrm{cond}_1(A) \leqslant \mathrm{cond}_\infty(A) \leqslant n^2\mathrm{cond}_1(A)$.

Beweis. Seien $a, b \in \{1, 2, \infty\}$. Nach Bemerkung 2.5 iii) gilt:
$\exists c_{1,a,b}, c_{2,a,b} > 0 : c_{1,a,b}\|A\|_b \leqslant \|A\|_a \leqslant c_{2,a,b}\|A\|_b \quad \forall A \in M_n(K)$.
Wir erhalten daraus:

$$\begin{aligned} c_{1,a,b}^2 \mathrm{cond}_{\|\cdot\|_b}(A) &= c_{1,a,b}^2 \|A\|_b \|A^{-1}\|_b \\ &\leqslant \mathrm{cond}_{\|\cdot\|_a}(A) \\ &\leqslant c_{2,a,b}^2 \|A\|_b \|A^{-1}\|_b \\ &= c_{2,a,b}^2 \mathrm{cond}_{\|\cdot\|_b}(A). \end{aligned}$$

Wegen $c_{1,1,2} = n^{1/-2}$, $c_{2,1,2} = n^{1/2}$, $c_{1,2,\infty} = n^{1/-2}$, $c_{2,2,\infty} = n^{1/2}$, $c_{1,\infty,1} = n^{-1}$ und $c_{2,\infty,1} = n$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung 2.7. *Aus Vortrag 2 wissen wir: Ist $A \in M_n(K)$ invertierbar, so gilt:*

$$A : S^{-1} \to E^{-1} \qquad x \mapsto Ax,$$

das heißt A bildet die n-dimensionale Einheitssphäre auf die Oberfläche eines n-dimensionalen Ellipsoiden ab, dessen Halbachsen die Singulärwerte von A sind. $\|A\|_2$ misst die Abflachung der Ellipse. A ist demnach gut konditioniert, falls der Ellipsoid nicht stark von der Einheitssphäre abweicht, das heißt $AS^{n-1} \approx S^{n-1}$.

Lemma 2.8. *Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ invertierbar und*

$$S_n := \{B \in M_n(\mathbb{C}) : B \textit{ ist nicht invertierbar}\}.$$

dann gilt

$$\frac{1}{\mathrm{cond}_{\|\cdot\|_2}(A)} = \inf_{B \in S_n} \frac{\|A - B\|_2}{\|A\|_2}.$$

Beweis. Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ invertierbar und $B \in S_n \subset M_n(K)$. Angenommen B erfüllt

$$\gamma := \|A^{-1}\|_2 \|B - A\|_2 \leqslant 1$$

so ist B nach Lemma 2.3 ($M = A, N = B$) invertierbar, das heißt $B \in S_n$. Somit gilt

$$\|A^{-1}\|_2 \|B - A\|_2 \geqslant 1 \ \forall B \in S_n$$

und somit

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|_2} \leqslant \|B - A\|_2 \ \forall B \in S_n.$$

Folglich gilt

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} \leqslant \inf_{B \in S_n} \|B - A\|_2. \tag{2.3}$$

Wir zeigen nun, dass das Infimum in (2.3) angenommen wird, das heißt

$$\exists B_0 \in S_n : \frac{1}{\|A^{-1}\|_2} = \|B_0 - A\|_2.$$

Dann gilt die Gleichheit in (2.3). Definiere

$$B_0 := A - \frac{u(A^{-1}u)^H}{\|A^{-1}\|_2^2}. \tag{2.4}$$

Nach Vortrag 3 gilt

$$\exists 0 \neq u \in \mathbb{C} \text{ mit} \|u\|_2 = 1 : \|A^{-1}\|_2 = \|A^{-1}u\|_2. \tag{2.5}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \|B_0 - A\|_2 &= \frac{1}{\|A^{-1}\|_2^2} \|u(A^{-1}u)^H\|_2 \\ &= \frac{1}{\|A^{-1}\|_2^2} \max_{x \in \mathbb{C}} \frac{\|u(A^{-1}u)^H x\|_2}{\|x\|_2} \\ &= \frac{1}{\|A^{-1}\|_2^2} \max_{x \in \mathbb{C}} \frac{|\langle A^{-1}u, x\rangle|}{\|x\|_2}. \end{aligned}$$

Hier geht ein, dass

$$u(A^{-1}u)^H = u\langle A^{-1}u, x\rangle \ \Rightarrow \|u(A^{-1}u)^H x\|_2 = \|u\|_2 \frac{|\langle A^{-1}u, x\rangle|}{\|x\|_2} = \frac{|\langle A^{-1}u, x\rangle|}{\|x\|_2}.$$

Da nun (mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $|\langle A^{-1}u, x\rangle| \leqslant \|A^{-1}u\|_2$ $\forall x \in \mathbb{C}^n$ gilt, folgt weiter

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|_2^2} \max_{x \in \mathbb{C}} \frac{|\langle A^{-1}u, x\rangle|}{\|x\|_2} = \frac{\|A^{-1}\|_2}{\|A^{-1}\|_2^2} = \frac{1}{\|A^{-1}\|_2}.$$

Wir erhalten

$$\frac{|\langle A^{-1}u, x\rangle|}{\|x\|_2} \leqslant \|A^{-1}u\|_2 \ \forall x \in \mathbb{C}^n \Rightarrow \max_{x \in \mathbb{C}^n} \frac{|\langle A^{-1}u, x\rangle|}{\|x\|_2} \leqslant \|A^{-1}u\|_2.$$

Damit wird das Maximum für $x = A^{-1}u \neq 0$ angenommen, da A invertierbar ist und $u \neq 0$.
Insbesondere gilt $B_0 \in S_n$, das heißt $\exists \neq w \in \mathbb{C}^n : B_0 w = 0$.

Für $w := A^{-1}u \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} B_0 w &= BA^{-1}u \\ &= u - \frac{u(A^{-1}u)^H(A^{-1}u)}{\|A^{-1}\|_2^2} \\ &= u - \frac{\langle A^{-1}u, A^{-1}u\rangle u}{\|A^{-1}\|_2^2} \\ &= u - \frac{\|A^{-1}u\|_2^2}{\|A^{-1}u\|_2^2}u \\ &= u - u \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Definition 2.9. *Sei $0 \neq A \in M_{m,n}(K)$ eine Matrix (nicht notwendigerweise quadratisch oder invertierbar) mit zugeordneter Matrixnorm $\|\cdot\|$ und $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Weiter bezeichne $A^+ \in M_{m,n}(K)$ die Pseudoinverse von A. Dann heißt*

$$\operatorname{cond}_{\|\cdot\|}(A) = \|A\|\|A^+\|$$

die Konditionszahl von A bezüglich $\|\cdot\|$.

Bemerkung 2.10. *Aus der Singulärwertzerlegung $A = V\Sigma U^H$ von A und der Definition der Pseudoinversen $A^+ = U\Sigma^+V^H$ erhalten wir:*

$$\|A^+\|_2 = \|\Sigma^+\|_2 = \frac{1}{\sigma_r},$$

wobei $\sigma_1 \geqslant \ldots \sigma_r > 0$ positive Singulärwerte von A sind. Somit gilt (vergleiche Proposition 2.4 (iii) mit $\sigma_j(A) := \sigma_j$)

$$\operatorname{cond}_{\|\cdot\|}(A) = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_r(A)}.$$

Dies entspricht einer Verallgemeinerung von Proposition 2.4 (iii).

3 Literaturverzeichnis

1: G. Allaire and S. M. Kaber. Numerical linear algebra, volume 55 of Texts in Applied Mathematics. Springer, New York, 2008. Translated from the 2002 French original by Karim Trabelsi.