

Proseminar: Angewandte Lineare Algebra

Sommersemester 2017

Prof. Dr. Wolf-Jürgen Beyn und Dr. Denny Otten

Vortragsthemen

1. Grundlagen der Spektraltheorie: Schursche und Jordansche Normalform
2. Singulärwertzerlegung
3. Vektornormen und induzierte Matrixnormen
4. Matrixkondition
5. Gaußsches Eliminationsverfahren und LR-Zerlegung
6. Cholesky-Zerlegung und QR-Algorithmus
7. Jacobi-Verfahren und Gauß-Seidel-Verfahren
8. Krylow-Unterraum-Verfahren
9. Verfahren der konjugierten Gradienten
10. Arnoldi-Verfahren und GMRES-Verfahren
11. Lanczos-Verfahren, Bi-Lanczos-Verfahren und BiCG-Verfahren und
12. Least-squares und QR-Zerlegung mittels Householder Algorithmus
13. Potenzmethode und orthogonale Iteration
14. Jacobi-Verfahren für Eigenwerte
15. Givens Householder Verfahren

Vorbesprechung

Mi., 15.02.2017, 14:15 Uhr, V5-148

Hinweise

Der auf der Liste angegebene Inhalt bildet den Rahmen für den jeweiligen Vortrag. Weitere Literaturangaben finden Sie in der Spalte Ergänzungen. Es ist zwingend erforderlich die Inhalte des Vortrags an die zur Verfügung stehende Zeit (ca. 80 Min. Vortrag + 10 Min. Diskussion) anzupassen (Faustregel: 4 handgeschriebene DinA4-Seiten). Für die Anpassung und weitere Rückfragen müssen die Veranstalter spätestens zwei Wochen vor dem Vortrag kontaktiert werden. Wann immer es sich anbietet, sind geeignete Beispiele wünschenswert. Numerische Rechnungen können etwa mit MATLAB durchgeführt werden.

Studienleistung (unbenotet)

- Fachlich korrekter mathematischer Vortrag (Umfang: ca. 80 Min. + 10 Min. Diskussion)
- Schriftliche Ausarbeitung einschließlich wesentlicher Beweisschritte (Umfang etwa 5-10 Seiten). Vorzugsweise mit \LaTeX . Bitte orientieren Sie sich bei der Ausarbeitung an der Anleitung https://www.math.uni-bielefeld.de/~beyn/AG_Numerik/downloads/teaching/studytips/Abschlussarbeiten.pdf.

Literatur

- [1] G. Allaire and S. M. Kaber. *Numerical linear algebra*, volume 55 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, 2008. Translated from the 2002 French original by Karim Trabelsi.
- [2] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix computations*. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, fourth edition, 2013.
- [3] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2013.
- [4] A. Meister. *Numerik linearer Gleichungssysteme*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1999. Eine Einführung in moderne Verfahren. [An introduction to modern procedures].

Die Literaturquellen stehen im Semesterapparat von Prof. Dr. Ľubomír Bañas.

Nr.	Thema	Inhalt	Ergänzungen	Name
1	Grundlagen der Spektraltheorie: Schursche und Jordansche Normalform	Abs.2.3, Abs.2.4, Abs.2.5 aus [1]	[1] 23-31	
2	Singulärwertzerlegung	Abs.1.5, Abs.2.7 aus [1]	[1] 12-14, 33-37	
3	Vektornormen und induzierte Matrixnormen	Abs.3.1, Abs.3.2 aus [1]	[1] 45-54	
4	Matrixkondition	Abs.5.3.2, Abs.5.3.3 aus [1]	[1] 79-88	
5	Gaußsches Eliminationsverfahren und LR-Zerlegung	Abs.6.1, Abs.6.2 aus [1]	[1] 97-111	
6	Cholesky-Zerlegung und QR-Algorithmus	Abs.1.1, Abs.6.3, Abs.6.4 aus [1]	[1] 1-4, 112-119	
7	Jacobi-Verfahren und Gauß-Seidel-Verfahren	Abs.8.1, Abs.8.2, Abs.8.4 aus [1]	[1] 143-150, 154-155	
8	Krylow-Unterraum-Verfahren	Abs.4.3, Abs.4.3.1 aus [4]	[4] 106-112	
9	Verfahren der konjugierten Gradienten	Abs.4.3.1.1, Abs.4.3.1.3 aus [4]	[4] 113-118, 120-128	
10	Arnoldi-Verfahren und GMRES-Verfahren	Abs.4.3.2.1, Abs.4.3.2.4 aus [4]	[4] 129-134, 143-157	
11	Lanczos-Verfahren, Bi-Lanczos-Verfahren und BiCG-Verfahren	Abs.4.3.2.2, Abs.4.3.2.3 (ohne Satz 4.72), Abs.4.3.2.5 aus [4]	[4] 134-136, 158-165	
12	Least-squares und QR-Zerlegung mittels Householder Algorithmus	Abs.1.2, Abs.7.1, Abs.7.3.3, Abs.7.3.4 aus [1]	[1] 4-8, 125, 132-140	
13	Potenzmethode und orthogonale Iteration	Abs.10.1, Abs.10.2, Abs.10.3 aus [1], Abs.7.3.2 (inkl. Thm.7.3.1, aber ohne Beweis) aus [2]	[1] 191-198, [2] 332-334	
14	Jacobi-Verfahren für Eigenwerte	Abs.1.3, Abs.10.4 aus [1]	[1] 8-10, 198-203	
15	Givens Householder Verfahren	Abs.1.4, Abs.10.5 aus [1]	[1] 10-12, 203-208	

Inhaltlicher Überblick

Proseminar: Angewandte Lineare Algebra

1. Matrix-Zerlegungen:

- Schur-Zerlegung (Schursche Normalform) ($A = URU^*$)
- Jordan-Zerlegung (Jordansche Normalform) ($A = QJQ^{-1}$)
- Singulärwertzerlegung ($A = U\Sigma V^*$)
- LR-Zerlegung ($A = LR$, $PA = LR$, $PAQ = LR$, $A = LDR$)
- Cholesky-Zerlegung ($A = LL^*$, $A = LDL^*$)
- QR-Zerlegung ($A = QR$)
- Polarzerlegung ($A = UP$)

2. Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme:

2.1. Direkte-Verfahren:

- Gaußsches Eliminationsverfahren (mittels LR-Zerlegung, Cholesky-Zerlegung)
- QR-Algorithmus

2.2. Iterative-Verfahren:

- Jacobi-Verfahren
- Gauss-Seidel-Verfahren
- Krylow-Unterraum-Verfahren
- CG-Verfahren (Verfahren der konjugierten Gradienten)
- BiCG-Verfahren (Verfahren der bikonjugierten Gradienten)
- GMRES-Verfahren
- modifiziertes Richardson-Verfahren
- konjugiertes Residuenverfahren
- Kaczmarz-Methode
- Stone-Verfahren (SIP-Verfahren)
- Tschebyschew-Iteration

3. Ausgleichsprobleme:

- Least-squares (Methode der kleinsten Quadrate)

4. Verfahren zum Lösen linearer Eigenwertprobleme:

- Potenzmethode (Vektoriteration, von-Mises-Iteration)
- Inverse Iteration (inverse Potenzmethode)
- Arnoldi-Verfahren
- Lanczos-Verfahren
- Bi-Lanczos-Verfahren (unsymmetrisches Lanczos-Verfahren)
- QR-Verfahren
- Jacobi-Verfahren (für Eigenwerte)
- Rayleigh-Quotienten-Iteration
- FSM-Verfahren (Spektrumsfaltung, folded spectrum method)
- LOBPCG-Verfahren (locally optimal block preconditioned conjugated gradient)

5. Anwendungen:

- Bildkompression (Singulärwertzerlegung)
- Diskretisierung einer Differentialgleichung (lineares Gleichungssystem)
- Datenanpassung mittels Methode der kleinsten Quadrate (least squares Problem)
- Schwingung eines mechanischen Systems (Eigenwertproblem)
- Saitenschwingung (Eigenwertproblem)

Hinweis:

Die Themen zu den blau markierten Begriffen werden detailliert im Rahmen dieses Proseminars behandelt. Die Themen zu den rot markierten Begriffen können aus Zeitgründen *nicht* behandelt werden und werden lediglich zur Vervollständigung der Übersicht aufgeführt.