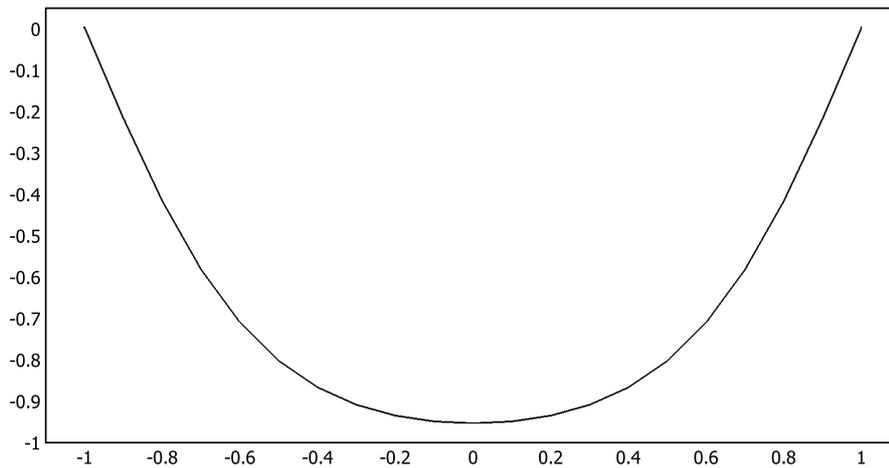


COMSOL Multiphysics Tutorial

Chafee-Infante-Equation (1D)



Denny Otten
Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik

Einleitung (Mathematischer Hintergrund)

Das Ziel dieses Tutorials ist die Implementierung der räumlich eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung mit Hilfe von COMSOL Multiphysics. Die Namensgebung der Gleichung ist auf die Mathematiker Nathaniel („Nat“) L. Chafee und Ettore („Jim“) Ferrari Infante zurückzuführen. Wir betrachten das folgende Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned}u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= \lambda(u(x, t) - u^3(x, t)), & |x| < 1, t \in]0, \infty[\\u(x, t) &= 0, & |x| = 1, t \in [0, \infty[\\u(x, 0) &= u_0(x), & |x| < 1, t = 0\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $\lambda \in \mathbb{R}$ einen reellen Kontrollparameter, $u_0 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine geeignete Anfangsfunktion und $u : [-1, 1] \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ die gesuchte Lösung.

1 Die Chafee-Infante-Gleichung (1D)

1. Starte **COMSOL Multiphysics**.

1.1 Modell-Navigator

2. Öffne im **Modell-Navigator** die Registerkarte **Neu**.
3. Wähle dort die Raumdimension **1D**.
4. Wähle im linken Bildteil **Anwendungsmodi** → **COMSOL Multiphysics** → **Partielle Differentialgleichungen (PDGL)** → **PDGL, Allgemeine Form** → **Zeitabhängige Analyse**.
5. Wähle unter **Abhängige Variablen** u , unter **Name des Anwendungsmodus** g und unter **Element** *Lagrange-Linear*.
6. Bestätige abschließend auf **OK**.

1.2 Konstanten festlegen

7. Wähle in der Menüleiste **Optionen** → **Konstanten...**
8. Gebe in den Spalten **Name**, **Ausdruck**, **Wert** und **Beschreibung** die in der folgenden Abbildung enthaltenen Variablen und Werte ein. Die Spalte **Wert** wird dabei automatisch aus der Spalte **Ausdruck** erzeugt.

Name	Ausdruck	Wert	Beschreibung
lam	10.0	10	lambda, Bifurkationsparameter

9. Bestätige abschließend auf **OK**.

1.3 Grundgebiet erzeugen

10. Wähle in der Menüleiste **Zeichnen** → **Objekt eingeben** → **Linie...**
11. Gebe im Bereich **Koordinaten** für x -1 1 ein. Weiter setze **Stil** auf *Polylinie* und trage unter **Name** *Intervall_0_2* ein (2 Intervalllänge, 0 Intervallmittelpunkt).
12. Bestätige die Eingaben auf **OK**.
13. Klicke abschließend auf den Button **Auf alle Objekte zoomen** (rotes Kreuz mit einer Lupe). Alternativ geht dies auch über **Optionen** → **Zoom** → **Auf alle Objekte zoomen**.

1.4 Differentialgleichung definieren

1.4.1 PDGL, Allgemeine Form (g)

14. Markiere im **Modell-Verzeichnisbaum** den Eintrag **PDGL, Allgemeine Form (g)** durch einen Mausklick mit der linken Taste.

Gebietbedingungen

15. Wähle in der Menüleiste **Physik** → **Gebietbedingungen** (F8)

1 Die Chafee-Infante-Gleichung (1D)

16. Wähle auf der linken Seite die Registerkarte **Gebiete**, markiere in der **Gebietauswahl** das Gebiet **1** durch einen Mausklick mit der linken Taste und mache einen Haken bei der Check-Box **Aktiv in diesem Bereich**.

17. In der Registerkarte **Koeffizienten** geben wir die folgenden **PDGL-Koeffizienten** ein

Koeffizient	Wert/Ausdruck	Beschreibung
Γ	$-ux$	Flussvektor
F	$\text{lam}*(u-u^3)$	Quellterm
e_a	0	Massenkoeffizient
d_a	1	Dämpfung/Massen-Koeffizient

18. In der Registerkarte **Anfangsbedingung** geben wir die folgenden **Anfangswerte** ein

$u(t_0)$	$\sin((x+1)\cdot\pi)$
$ut(t_0)$	0

19. In der Registerkarte **Element** geben wir in der **Element-Auswahl** unter **Vordefinierte Elemente** *Lagrange-Linear* ein (insofern wir dies zu Beginn vergessen haben). Die Eigenschaften **shape** (Formfunktion), **gporder** (Integrationsordnung), **cporder** (Nebenbedingungs-Ordnung) und **bnd.gporder** (Integrationsgrad für ultraschwachen Term) bleiben dabei unverändert.

20. In der Registerkarte **Schwache Form** lassen wir den Inhalt zu **Beitrag schwachen Form** unverändert.

21. Bestätige die Eingabe abschließend mit **OK**.

Randbedingungen

22. Wähle in der Menüleiste **Physik** → **Randbedingungen** (F7)

23. Wähle auf der linken Seite die Registerkarte **Ränder**, markiere in der **Randauswahl** alle 2 Ränder: Dazu markiere durch einen Mausklick mit der linken Taste den Rand 1, halte die Shift-Taste gedrückt und markiere erneut durch einen Mausklick mit der linken Taste den 2. Rand.

24. In der Registerkarte **Koeffizienten** geben wir unter **Randbedingungen** *Dirichlet-Randbedingung* ein. Für die **Koeffizienten** G (bzw. R) wählen wir den **Wert/Ausdruck** 0 (bzw. $-u$).

25. Die Registerkarte **Schwache Form** bleibt unverändert.

26. Bestätige die Eingabe abschließend mit **OK**.

1.5 Netz-Generierung

27. Markiere im **Modell-Verzeichnisbaum** den Modell-Namen **Geom1** durch einen Mausklick mit der linken Taste.

28. Wähle in der Menüleiste **Netz** → **Freie Netzgenerierungsparameter...** (F9)

29. In der Registerkarte **Global** stellen wir **Maximale Elementgröße** auf 0.1. Der **Maximale Skalierungsfaktor für Elementgröße** wird auf 1 und die **Elementvergrößerungsrate** auf 1.3 gesetzt.

30. Klicke nun auf den Button **Netz generieren** und warte bis das Netz erzeugt wurde.

31. Bestätige die Eingabe abschließend mit **OK**.

1.6 Modell lösen

32. Wähle in der Menüleiste **Lösen** → **Löserparameter...** (F11)

33. Wähle auf der linken Seite unter **Löser** *Zeitabhängig* und mache darunter einen Haken bei der Check-Box **Plotten während des Lösens**.

34. In der Registerkarte **Allgemein**, die sich auf der rechten Seite befindet, geben wir unter **Zeitschrittsteuerung** die **Zeiten** 0:0.01:6, die **Relative Genauigkeit** 0.001 und die **Absolute Genauigkeit** 0.00010 ein.

35. Die Registerkarten **Zeitschrittsteuerung** und **Erweitert** bleiben in diesem Beispiel unverändert.

1 Die Chafee-Infante-Gleichung (1D)

36. Bestätige die Eingabe mit **OK**.
37. Wähle in der Menüleiste **Lösen** → **Lösermanager...**
38. In der Registerkarte **Anfangswert** wählen wir unter **Anfangswert** *Anfangsbedingung* und unter **Werte für nicht zu lösende Variablen und Linearisierungspunkt** *Einstellung aus der Anfangsbedingung verwenden*.
39. Bestätige die Eingabe abschließend mit **OK**.
40. Wähle in der Menüleiste **Lösen** → **Modell lösen...**
41. Beachte: Falls nachträglich Änderungen am Modell (z.B. Änderung der Konstanten, Randbedingungen, Gebietbedingungen, u.s.w.) vorgenommen werden, muss das Modell zunächst wieder aktualisiert werden. Dies erfolgt über die Menüleiste: **Lösen** → **Modell aktualisieren**. Das Modell muss nun erneut gelöst werden.

1.7 Postprozessing

42. Wähle in der Menüleiste **Postprozessing** → **Plotparameter...** (F12)
43. In der Registerkarte **Allgemein** werden Ploteigenschaften (**Linie** (Lösungsgraph durch eine Linie darstellen), **Min/Max-Markierung** (Markierung von Min/Max des Lösungsgraphen) und **Geometriebegrenzungen** (Hervorhebung der Randpunkte)) angezeigt. Beachte: Änderungen in den Plotparametern können durch einen Klick mit der linken Maustaste auf **Zuweisen** direkt (d.h. unmittelbar) angezeigt werden. Unter **zu verwendende Lösung** auf der rechten Seite können wir für **Lösung zur Zeit** einen beliebigen Zeitpunkt auswählen, zu dem wir den Lösungsgraphen betrachten wollen. Wir nehmen hier keine weiteren Änderungen vor.
44. In der Registerkarte **Linie** können wir unter **Liniendarstellung** auswählen, ob der Funktionsgraph angezeigt werden soll. Unter **Höhendaten** lässt sich bei **Vordefinierte Größen** einstellen, ob die Lösung selbst oder eine bestimmte zeitliche (bzw. räumliche) Ableitung geplottet werden soll. Im Bereich **Linienfarbe** lässt sich unter **Einheitliche Farbe** die Farbe des Funktionsgraphen festlegen. Wir nehmen auch hier keine weiteren Änderungen vor.
45. In der Registerkarte **Min/Max** können wir unter **Min/Max-Markierung** einstellen, ob das Minimum und Maximum der Lösung angezeigt werden sollen. Wir nehmen auch hier keine Änderungen vor.
46. In der Registerkarte **Animation** erstellen wir nun ohne großen Aufwand ein kleines Movie. Beachte: Diese lassen sich anschließend auch problemlos (z.B. mit dem movie15-Paket) in Beamer-Vorträge einbinden. Unter **Animationseinstellungen** wählen wir für den **Ausgabe-Typ** *Film*, **Dateityp** *AVI*, **Breite (in Pixeln)** *640*, **Höhe (in Pixeln)** *480* und unter **Bilder pro Sekunde** *20*. Unter **Erweitert** wählen wir als **Filmqualität** *Beste*. Bestätige die Eingabe abschließend auf **Animation starten** und warte bis die Animation beendet ist. Im Fenster **COMSOL-Animation**, in dem die Animation durchgelaufen ist, lässt sich die Animation durch einen Klick mit der linken Maustaste auf das Diskettensymbol speichern. Das Video wird zum Ende dieses Dokuments präsentiert und lässt sich durch einen Mausklick starten.

1.8 Ergänzende Einstellungen

47. Wähle in der Menüleiste **Datei** → **Modelleigenschaften...**
48. In der Registerkarte **Allgemein** wählen wir für **Modellname** *Chafee-Infante-1D*, für **Autor** *Vorname Nachname*, für **Firma** *Universität Bielefeld*, für **Abteilung** *Fakultät für Mathematik*, das Feld **Referenz** lassen wir leer und unter **URL** geben wir *http://www.math.uni-bielefeld.de*.
49. In der Registerkarte **Beschreibung** vermerken wir in der **Modellbeschreibung** *Dieses Modell berechnet die Lösung der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung im Intervall zwischen -1 und 1*.
50. In der Registerkarte **Bemerkung** führen wir unter **Ergebnisbeschreibung** auf *Die Lösungen konvergieren allesamt für t gegen unendlich...*

1 Die Chafee-Infante-Gleichung (1D)

51. Die Registerkarte **Info** wird von COMSOL automatisch ausgefüllt.
52. Bestätige die Eingabe mit **OK**.
53. Zuletzt werden wir das Modell speichern. Dazu wähle in der Menüleiste **Datei** → **Speichern unter...**
54. Wechsle im Fenster **Speichern unter** in das gewünschte Verzeichnis und gebe den **Dateinamen** *Chafee-Infante-1D.mph* ein.
55. Bestätige die Eingabe mit **Speichern** und beende COMSOL Multiphysics.

