Blatt II

Abgabe bis spätestens 30.04

Aufgabe 5 *(4 Punkte)*
Sie $z_1, z_2, \ldots$ eine beliebige Folge in $\mathbb{C}$. Bezeichne mit $r_n \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_n \in (-\pi, \pi]$ die Polardarstellung von z_n, d.h. $z_n = r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$.

a) Man nehme an, daß (z_n) gegen $z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$ konvergiert. Zeige, daß dann $(r_n)_n$ und $(\varphi_n)_n$ konvergieren.

b) Was kann in den Fällen $z = 0$ und $z < 0$ passieren?

c) Zeige, wenn $(r_n)_n$ und $(\varphi_n)_n$ konvergieren, daß dann $(z_n)_n$ konvergiert.

d) Zeige, wenn $(z_n)_n$ gegen z konvergiert, daß dann auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n} = z.$$

Aufgabe 6 *(4 Punkte)*
Seien a, b positive Konstanten und t sei eine reelle Variable. Welche Kurven in der komplexen Ebene werden durch die folgenden Funktionen beschrieben:

a) $t \mapsto ia + at$;

b) $t \mapsto -ibe^{-it}$;

c) $t \mapsto ia + at - ibe^{-it}$.

Aufgabe 7 *(4 Punkte)*

a) Ist die Funktion $f(z) := 1/(1-z)$ im Inneren des Einheitskreises bzw. im abgeschlossenen Einheitskreis stetig? Ist sie dort auch gleichmäßig stetig.

b) In $0 < |z| < 1$ sei $f(z) = e^{-1/|z|}$. Ist diese Funktion dort stetig? Kann man sie auf $|z| \leq 1$ stetig fortsetzen?

Aufgabe 8 * *(4 Punkte)*
Sie $z_1, z_2, \ldots$ eine beliebige Folge in $\mathbb{C}$, so daß $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \infty$. Zeige, daß eine Häufungsrichtung existiert, d.h. es gibt eine reelle Zahl α, so daß für jedes $\varepsilon > 0$ die Teilfolge der Partialsummen $\sum_{n=1}^{N} z_n$ mit Argument in $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ eine absolut divergente Teilsumme bilden.