Blatt IV

Abgabe bis spätestens 15.05

Aufgabe 13 *(4 Punkte)*
Es seien r_1 und r_2 die Konvergenzradien von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Zeige:

a) falls $|a_n| \leq |b_n|$ ist für alle n, dann ist $r_1 \geq r_2$.

b) der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$ ist größer oder gleich $\min\{r_1, r_2\}$.

c) der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n b_n) z^n$ ist größer oder gleich $r_1 r_2$.

Aufgabe 14 *(4 Punkte)*
Falls die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ reel auf dem Interval $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$ ist, dann sind alle a_n reel. Man bestimme die Konvergenzradien von

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$.

Aufgabe 15 *(4 Punkte)* Man stelle $\cos^n z$ und $\sin^n z$ als Linearkombination der Funktionen $\cos(kz)$ und $\sin(kz)$ mit $k = 0, \ldots, n$ dar.

Aufgabe 16 *(4 Punkte)*
Mit Hilfe der Eulerschen Formel leite man her

$$2 \sum_{k=0}^{n} \cos(kz) = 1 + \frac{\sin\left((n + 1/2)z\right)}{\sin(z/2)}.$$