Blatt XI

Abgabe bis spätestens 03.07

Aufgabe 40 *(4 Punkte)*
Sei $a \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie für einen glatten geschlossenen Pfad, der a nicht enthält, mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel

$$\int_\Gamma \frac{ze^z}{(z-a)^3} dz.$$

Aufgabe 41 *(4 Punkte)*
Sei G ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, welches 0 enthält. Sei f eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und beschränkt außerhalb von G. Beweisen Sie, daß

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{zf(\zeta)}{\zeta(z-\zeta)} d\zeta.$$

Hinweis: Benutzen Sie Gebiete $D_R(0) \setminus G$ für große R.

Aufgabe 42 *(4 Punkte)*
Sei $R > 0$, $a, b \in D_R(0)$ und f eine holomorphe Funktion in einer Umgebung von $D_R(0)$. Berechne

$$\int_{\partial D_r(0)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz.$$

Beweisen Sie mit Hilfe dieses Integrals den Satz von Liouville, d.h. zeigen Sie, daß jede beschränkte ganze Funktion konstant ist.

Aufgabe 43 *(4 Punkte)*
Man nehme an, daß f eine analytische Funktion auf $S := \left\{ z \middle| \, |\Re z| < a \right\}$ sei für ein $a > 0$. Man nehme weiterhin an, daß zwei Konstanten $c, C > 0$ existieren, so daß

(i) $|f(z)| \leq e^{c|z|}$

(ii) $\limsup_{z \to a+iy_0} |f(z)| \leq C$ und $\limsup_{z \to a-iy_0} |f(z)| \leq C$ für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, daß $|f(z)| \leq C$. **Hinweis:** Benutzen Sie $f(z)e^{\varepsilon z^2}$ mit $\varepsilon > 0$.