Aufgabe 1

Sei $0 \neq z_0 \in \mathbb{C}$. Welche komplexe Zahl entspricht dem Spiegelbild von z_0

(a): am Nullpunkt?
(b): an der reellen Achse?
(c): an der imaginären Achse
(d): an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten?
(e): an der Winkelhalbierenden des 2. Quadranten?

Lösung:

zu (a): Spiegelung am Nullpunkt:

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mit } z_0 = x_0 + iy_0 \longmapsto -x_0 - iy_0 = -(x_0 + iy_0) = -z_0$$

zu (b): Spiegelung an der reellen Achse:

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mit } z_0 = x_0 + iy_0 \longmapsto x_0 - iy_0 = \overline{x_0 + iy_0} = \overline{z_0}$$

zu (c): Spiegelung an der imaginären Achse:

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mit } z_0 = x_0 + iy_0 \longmapsto -x_0 + iy_0 = -(x_0 - iy_0) = -\overline{(x_0 + iy_0)} = -\overline{z_0}$$

zu (d): Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten:

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mit } z_0 = x_0 + iy_0 \longmapsto y_0 + ix_0 = i \cdot (x_0 - iy_0) = i \cdot \overline{(x_0 + iy_0)} = i \cdot \overline{z_0}$$

zu (e): Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 2. Quadranten:

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mit } z_0 = x_0 + iy_0 \longmapsto -y_0 - ix_0 = -i \cdot (x_0 - iy_0) = -i \cdot \overline{(x_0 + iy_0)} = -i \cdot \overline{z_0}$$

Aufgabe 2

Zeige, dass $\mathbb{R}^2$ mit den in der Vorlesung definierten Verknüpfungen einen Körper bildet.

Lösung:

Wir werden den Beweis in drei Teilen zeigen: (1): $(\mathbb{R}^2, +)$ ist eine abelsche Gruppe, (2): $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe und (3): Distributivgesetz

zu (1):

(i): z.z.: $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}^2 : \; (a + b) + c = a + (b + c)$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + x_3 \\ (y_1 + y_2) + y_3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(\mathbb{R},+)\text{ assoziativ}}{=} \begin{pmatrix} x_1 + (x_2 + x_3) \\ y_1 + (y_2 + y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ y_2 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}\right)$$

(ii): z.z.: $\exists_1\, \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2\; \forall\, a \in \mathbb{R}^2 : \; \mathbf{0} + a = a = a + \mathbf{0}$

Definiere:

$$\mathbf{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 0 \\ y + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + x \\ 0 + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Eindeutigkeit: Sei **0’** ein weiteres neutrales Element. Dann gilt:

$$\mathbf{0} \overset{\mathbf{0'}\text{ neutrales Element}}{=} \mathbf{0} + \mathbf{0'} \overset{\mathbf{0}\text{ neutrales Element}}{=} \mathbf{0'}$$

(iii): z.z.: $\forall\, a \in \mathbb{R}^2\ \exists_1\ -a \in \mathbb{R}^2 :\ a + (-a) = \mathbf{0} = (-a) + a$
Sei $a = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Definiere:

$$(-a) := \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + (-x) \\ y + (-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-x) + x \\ (-y) + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Eindeutigkeit: Sei $(-a)'$ ein weiteres zu a inverses Element. Dann gilt:

$$a + (-a)' \overset{(-a)' \text{ invers zu } a}{=} \mathbf{0} \overset{-a \text{ invers zu } a}{=} a + (-a) \implies (-a) = (-a)'$$

(iv): z.z.: $\forall\, a, b \in \mathbb{R}^2 :\ a + b = b + a$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \overset{(\mathbb{R},+) \text{ kommutativ}}{=} \begin{pmatrix} x_2 + x_1 \\ y_2 + y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Damit ist (1) gezeigt.
zu (2):
(i): z.z.: $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}^2 :\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$$\begin{aligned} &\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 \\ x_1y_2 + x_2y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} (x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + x_2y_1)y_3 \\ (x_1x_2 - y_1y_2)y_3 + x_3(x_1y_2 + x_2y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(x_2y_3 + x_3y_2) \\ x_1(x_2y_3 + x_3y_2) + (x_2x_3 - y_2y_3)y_1 \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2x_3 - y_2y_3 \\ x_2y_3 + x_3y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

(ii): z.z.: $\exists_1\, \mathbf{1} \in \mathbb{R}^2\ \forall\, a \in \mathbb{R}^2 :\ \mathbf{1} \cdot a = a = a \cdot \mathbf{1}$
Definiere:

$$\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot 1 - y \cdot 0 \\ x \cdot 0 + 1 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x - 0 \cdot y \\ 1 \cdot y + x \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Eindeutigkeit: Sei **1’** ein weiteres neutrales Element. Dann gilt:

$$\mathbf{1} \overset{\mathbf{1'} \text{ neutrales Element}}{=} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1'} \overset{\mathbf{1} \text{ neutrales Element}}{=} \mathbf{1'}$$

(iii): z.z.: $\forall\, a \in \mathbb{R}^2\ \exists_1\, a^{-1} \in \mathbb{R}^2 :\ a \cdot a^{-1} = \mathbf{1} = a^{-1} \cdot a$
Sei $a = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Definiere:

$$a^{-1} := \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot \frac{x}{x^2+y^2} - y \cdot (-\frac{y}{x^2+y^2}) \\ x \cdot (-\frac{y}{x^2+y^2}) + \frac{x}{x^2+y^2} \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \cdot x - (-\frac{y}{x^2+y^2}) \cdot y \\ \frac{x}{x^2+y^2} \cdot y + x \cdot (-\frac{y}{x^2+y^2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Eindeutigkeit: Sei $(a^{-1})'$ ein weiteres zu a inverses Element. Dann gilt:

$$a \cdot (a^{-1})' \overset{(a^{-1})' \text{ invers zu } a}{=} \mathbf{1} \overset{a^{-1} \text{ invers zu } a}{=} a \cdot a^{-1} \implies a^{-1} = (a^{-1})'$$

(iv): z.z.: $\forall\, a, b \in \mathbb{R}^2 :\ a \cdot b = b \cdot a$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 \\ x_1y_2 + x_2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2x_1 - y_2y_1 \\ x_2y_1 + x_1y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Damit ist (2) gezeigt.

zu (3):

z.z.: $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}^2 :\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ y_2 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(x_2+x_3) - y_1(y_2+y_3) \\ x_1(y_2+y_3) + (x_2+x_3)y_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3 \\ x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 \\ x_1y_2 + x_2y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1x_3 - y_1y_3 \\ x_1y_3 + x_3y_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Damit ist (3) gezeigt und $\mathbb{R}^2$ somit ein Körper. Auch wenn es an einigen Stellen nicht ausdrücklich genug angedeutet wurde, ist die Gültigkeit jeder einzelnen Rechenregel darauf zurückzuführen, dass $\mathbb{R}$ ein Körper ist.

Aufgabe 3

Welches geometrisches Objekt beschreibt die jeweilige Menge

(a): $|z| \leqslant 2$

(b): $\operatorname{Re} z \geqslant \frac{1}{2}$

(c): $\operatorname{Re} z^2 = 2$

(d): $\left|\frac{1}{z}\right| \leqslant \frac{1}{3}$

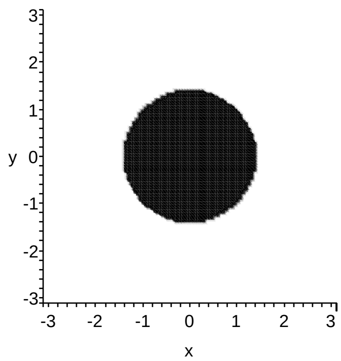
(e): $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leqslant 1$

Lösung:

zu (a): $|z| \leqslant 2$

$$\begin{aligned} |z| \leqslant 2 &\iff |z|^2 \leqslant 2^2 \\ &\iff x^2 + y^2 = z \cdot \overline{z} \leqslant 2^2 \\ &\iff \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{2^2} \leqslant 1 \end{aligned}$$

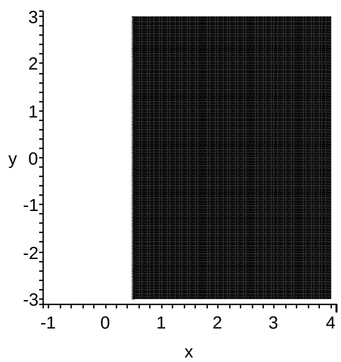
Damit bildet das durch die Ungleichung beschriebene Gebiet eine Ellipse (mit Innerem), deren Zentrum sich im Ursprung der Gaußschen Zahlenebene befindet. Zur Erinnerung: Eine Ellipse besitzt die allgemeine Darstellung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und gehört zur Klasse der Kegelschnitte. Im unserem Spezialfall haben wir $a = b = 2$. Daher beschreibt das Gebiet $|z| \leqslant 2$ eine spezielle (gefüllte) Ellipse, und zwar einen Kreis mit Radius 2 (inklusive seines Inneren), deren Zemtrum gerade der Ursprung der Gaußschen Zahlenebene ist.



zu (b): $\operatorname{Re} z \geqslant \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} z \geqslant \frac{1}{2} &\iff z = x + iy \text{ mit } x, y \in \mathbb{R} \text{ und } x \geqslant \frac{1}{2} \\ &\iff (x, y) \in [\frac{1}{2}, +\infty[\times \mathbb{R}\end{aligned}$$

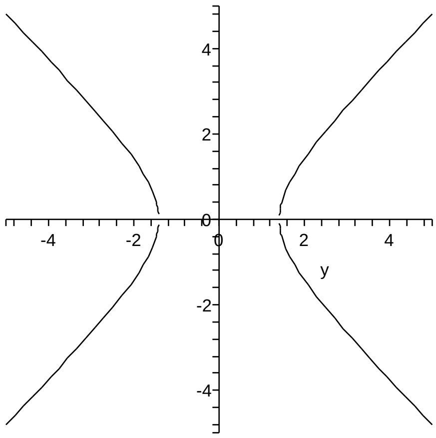
Damit stimmt das durch die Ungleichung beschriebene Gebiet in der Gaußschen Zahlenebene mit der um $\frac{1}{2}$ nach rechts transferierten (d.h. verschobenen) abgeschlossenen rechten Halbebene überein. (Bemerke: Die rechte Halbebene heißt *abgeschlossen*, falls die Gerade $x = 0$ in der Gaußschen Zahlenebene zum Gebiet gehört.)



zu (c): $\operatorname{Re} z^2 = 2$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(z^2) = 2 &\iff \operatorname{Re}((x+iy)^2) = 2 \\ &\iff \operatorname{Re}(x^2 - y^2 + i2xy) = 2 \\ &\iff x^2 - y^2 = 2 \\ &\iff x^2 = y^2 + 2 \\ &\iff x = +\sqrt{y^2+2} \text{ und } x = -\sqrt{y^2+2} \text{ (bzw. } y = +\sqrt{x^2-2} \text{ und } y = -\sqrt{x^2-2})\end{aligned}$$

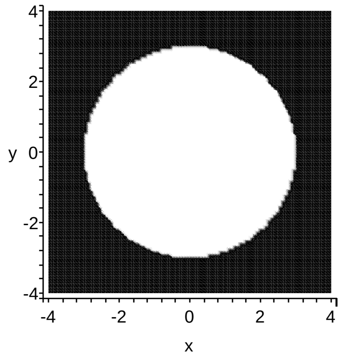
Damit bildet das durch die Ungleichung beschriebene Gebiet zwei Parabeln, deren Öffnungen sich in der Gaußschen Zahlenebene nach links bzw. nach rechts befinden.



zu (d): $\left|\frac{1}{z}\right| \leqslant \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{z}\right| \leqslant \frac{1}{3} &\iff 3 \leqslant |z| \\ &\iff 3^2 \leqslant |z|^2 \\ &\iff 3^2 \leqslant z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \\ &\iff 1 \leqslant \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{3^2}\end{aligned}$$

Damit bildet das durch die Ungleichung beschriebene Gebiet - wie bereits in Teil (a) - eine Ellipse (mit Äußerem), deren Zentrum gerade der Ursprung der Gaußschen Zahlenebene ist. Wegen $a = b = 3$ (siehe Notation in (a)) beschreibt das Gebiet $\left|\frac{1}{z}\right| \leqslant \frac{1}{3}$ einen Kreis um den Ursprung mit Radius 3 (inklusive seines Äußeren).

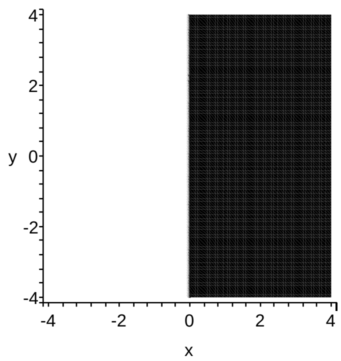


zu (e): $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leqslant 1$

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leqslant 1 &\iff \frac{|z-1|}{|z+1|} \leqslant 1 \\ &\iff \frac{|(x-1)+iy|}{|(x+1)+iy|} \leqslant 1 \\ &\iff \frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2} \leqslant 1 \\ &\iff (x-1)^2+y^2 \leqslant (x+1)^2+y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff x^2 - 2x + 1 \leqslant x^2 + 2x + 1\\
&\iff 0 \leqslant 4x\\
&\iff 0 \leqslant x
\end{aligned}$$

Damit stimmt das durch die Ungleichung beschriebene Gebiet in der Gaußschen Zahlenebene mit der gesamten abgeschlossenen rechten Halbebene überein.



Aufgabe 4

Stelle die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x+iy$ dar und gebe ihre Beträge sowie ihre Argumente an.

(a): i^n, für $n \in \mathbb{Z}$

(b): $(1+i)^n$, für $n \in \mathbb{Z}$

(c): $\dfrac{4+6\sqrt{3}+i(4\sqrt{3}-6)}{2-3i}$

Lösung:

zu (a): i^n (für $n \in \mathbb{Z}$)

Kommen wir zunächst zur Darstellung der Zahl i^n in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dazu betrachten wir exemplarisch

$$i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = i^2 \cdot i = -i \text{ und } i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1$$

Man sieht auf diese Weise direkt die Darstellung von i^n in der Form $x + iy$:

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{, falls } n = 4k \text{ mit } k \in \mathbb{Z}\\ i & \text{, falls } n = 4k+1 \text{ mit } k \in \mathbb{Z}\\ -1 & \text{, falls } n = 4k+2 \text{ mit } k \in \mathbb{Z}\\ -i & \text{, falls } n = 4k+3 \text{ mit } k \in \mathbb{Z}\end{cases}$$

Erinnerung: Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}^\bullet := \mathbb{C}\backslash\{0\}$ lässt sich in der Polarkoordinatendarstellung (Polarform) schreiben als $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, wobei $r := |z| = \sqrt{z\cdot\overline{z}} \in \mathbb{R}_+$ eindeutig bestimmt ist. Der Argument (bzw. der Winkel) $\phi \in \mathbb{R}$ ist nur bis auf ein additives ganzzahliges Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt, d.h.: Ist φ_0 ein (festes) Argument von z, so besitzt jedes weitere Argument φ von z die Darstellung $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Das Argument $\varphi \in]-\pi,\pi]$ von z nennt man den *Hauptwert* des Arguments.

Kommen wir nun zum Betrag $|i^n|$. Dazu benötigen wir keine Fallunterscheidung:

$$|i^n| = \sqrt{i^n \cdot \overline{i^n}} = \sqrt{i^n \cdot \overline{i}^n} = \sqrt{(i\cdot\overline{i})^n} = \sqrt{(-(i^2))^n} = \sqrt{1^n} = \sqrt{1} = 1$$

Kommen wir schlussendlich zu dem Argument $\arg(i^n)$. Dazu greifen wir auf unsere vier Darstellungen von i^n zurück.
1. Fall: $n = 4k$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)
In diesem Fall gilt $i^n = 1$. Wir stellen 1 nun als Polarkoordinatendarstellung dar durch

$$1 = 1 \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

Folglich erhalten wir die zwei Bedingungen

$$\cos\varphi = 1 \text{ und } \sin\varphi = 0$$

Diese Gleichungen besitzen die gemeinsame Lösung $\varphi = 0$ und liefern uns somit den Hauptwert des Arguments:

$$\varphi = \arg(i^n) \overset{n=4k}{=} \arg(1) = 0 \in]-\pi, \pi]$$

2. Fall: $n = 4k + 1$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)
In diesem Fall gilt $i^n = i$. Wir stellen i wieder als Polarkoordinatendarstellung dar durch

$$i = 1 \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

Folglich erhalten wir die zwei Bedingungen

$$\cos\varphi = 0 \text{ und } \sin\varphi = 1$$

Diese Gleichungen besitzen die gemeinsame Lösung $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und liefern uns somit den Hauptwert des Arguments:

$$\varphi = \arg(i^n) \overset{n=4k+1}{=} \arg(i) = \frac{\pi}{2} \in]-\pi, \pi]$$

3. Fall: $n = 4k + 2$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)
In diesem Fall gilt $i^n = -1$. Wir stellen -1 wieder als Polarkoordinatendarstellung dar durch

$$-1 = 1 \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

Folglich erhalten wir die zwei Bedingungen

$$\cos\varphi = -1 \text{ und } \sin\varphi = 0$$

Diese Gleichungen besitzen die gemeinsame Lösung $\varphi = \pi$ und liefern uns somit den Hauptwert des Arguments:

$$\varphi = \arg(i^n) \overset{n=4k+2}{=} \arg(-1) = \pi \in]-\pi, \pi]$$

4. Fall: $n = 4k + 3$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)
In diesem Fall gilt $i^n = -i$. Wir stellen $-i$ wieder als Polarkoordinatendarstellung dar durch

$$-i = 1 \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

Folglich erhalten wir die zwei Bedingungen

$$\cos\varphi = 0 \text{ und } \sin\varphi = -1$$

Diese Gleichungen besitzen die gemeinsame Lösung $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ und liefern uns somit den Hauptwert des Arguments:

$$\varphi = \arg(i^n) \overset{n=4k+3}{=} \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \in]-\pi, \pi]$$

zu (b): $(1+i)^n$ (für $n \in \mathbb{Z}$)
Kommen wir zunächst zur Darstellung der Zahl $(1+i)^n$ in der Form $x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dazu unterscheiden wir vier Fälle.
1. Fall: $n = 4k$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)

$$(1+i)^n \overset{n=4k}{=} ((1+i)^4)^k = (-4)^k$$

2. Fall: $n = 4k+1$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)

$$(1+i)^n \overset{n=4k+1}{=} ((1+i)^4)^k \cdot (1+i) = (-4)^k \cdot (1+i)$$

3. Fall: $n = 4k+2$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)

$$(1+i)^n \overset{n=4k+2}{=} ((1+i)^4)^k \cdot (1+i)^2 = (-4)^k \cdot (2i)$$

4. Fall: $n = 4k+3$ (mit $k \in \mathbb{Z}$)

$$(1+i)^n \overset{n=4k+3}{=} ((1+i)^4)^k \cdot (1+i)^3 = (-4)^k \cdot (-2+2i)$$

Daraus erhalten wir die Darstellung von $(1+i)^n$ in der Form $x+iy$:

$$(1+i)^n = \begin{cases} (-4)^k & \text{, falls } n = 4k \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\ (-4)^k \cdot (1+i) & \text{, falls } n = 4k+1 \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\ (-4)^k \cdot (2i) & \text{, falls } n = 4k+2 \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\ (-4)^k \cdot (-2+2i) & \text{, falls } n = 4k+3 \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Kommen wir nun zum Betrag $|(1+i)^n|$. Dazu benötigen wir keine Fallunterscheidung:

$$|(1+i)^n| = |1+i|^n = \left(\sqrt{(1+i)(1-i)}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n = \sqrt{2^n}$$

Kommen wir schlussendlich zu dem Argument $\arg((1+i)^n)$. Dazu greifen wir auf unsere vier Darstellungen von $(1+i)^n$ zurück.
1. Fall: $n = 4k$ (mit $k \in \mathbb{Z}$) In diesem Fall gilt $(1+i)^n = (-4)^k$. Wir stellen $(-4)^k$ wieder als Polarkoordinatendarstellung dar durch

$$(-4)^k = (4^k) \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

wobei $r = |(1+i)^n| = \sqrt{2^n} = \sqrt{2^{4k}} = 4^k$. Folglich erhalten wir die zwei Bedingungen

$$\cos\varphi = (-1)^k \text{ und } \sin\varphi = 0$$

Diese Gleichungen besitzen die gemeinsame Lösung $\varphi = 0$ (falls k gerade) bzw. $\varphi = \pi$ (falls k ungerade) und liefern uns somit den Hauptwert des Arguments:

$$\varphi = \arg((1+i)^n) \overset{n=4k}{=} \arg((-4)^k) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } k \text{ gerade} \\ \pi & \text{, falls } k \text{ ungerade} \end{cases} \in]-\pi, \pi]$$

2. Fall: $n = 4k+1$ (mit $k \in \mathbb{Z}$) In diesem Fall gilt $(1+i)^n = (-4)^k \cdot (1+i)$. Wir stellen $(-4)^k \cdot (1+i)$ wieder als Polarkoordinatendarstellung dar durch

$$(-4)^k \cdot (1+i) = 4^k\sqrt{2} \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

wobei $r = |(1+i)^n| = \sqrt{2^n} = \sqrt{2^{4k+1}} = 4^k\sqrt{2}$. Folglich erhalten wir die zwei Bedingungen

$$\cos\varphi = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} \text{ und } \sin\varphi = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}$$

Diese Gleichungen besitzen die gemeinsame Lösung $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (falls k gerade) bzw. $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ (falls k ungerade) und liefern uns somit den Hauptwert des Arguments:

$$\varphi = \arg((1+i)^n) \overset{n\,=\,4k\,+\,1}{=} \arg((-4)^k \cdot (1+i)) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{, falls } k \text{ gerade} \\ -\frac{3\pi}{4} & \text{, falls } k \text{ ungerade} \end{cases} \in]-\pi,\pi]$$

3. Fall: $n = 4k+2$ (mit $k \in \mathbb{Z}$) In diesem Fall gilt $(1+i)^n = (-4)^k \cdot (2i)$. Wir stellen $(-4)^k \cdot (2i)$ wieder als Polarkoordinatendarstellung dar durch

$$(-4)^k \cdot (2i) = 2 \cdot 4^k \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

wobei $r = |(1+i)^n| = \sqrt{2^n} = \sqrt{2^{4k+2}} = 2 \cdot 4^k$. Folglich erhalten wir die zwei Bedingungen

$$\cos\varphi = 0 \text{ und } \sin\varphi = (-1)^k$$

Diese Gleichungen besitzen die gemeinsame Lösung $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (falls k gerade) bzw. $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ (falls k ungerade) und liefern uns somit den Hauptwert des Arguments:

$$\varphi = \arg((1+i)^n) \overset{n\,=\,4k\,+\,2}{=} \arg((-4)^k \cdot (2i)) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{, falls } k \text{ gerade} \\ -\frac{\pi}{2} & \text{, falls } k \text{ ungerade} \end{cases} \in]-\pi,\pi]$$

4. Fall: $n = 4k+3$ (mit $k \in \mathbb{Z}$) In diesem Fall gilt $(1+i)^n = (-4)^k \cdot (-2+2i)$. Wir stellen $(-4)^k \cdot (-2+2i)$ wieder als Polarkoordinatendarstellung dar durch

$$(-4)^k \cdot (-2+2i) = 2 \cdot 4^k\sqrt{2} \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

wobei $r = |(1+i)^n| = \sqrt{2^n} = \sqrt{2^{4k+3}} = 2 \cdot 4^k\sqrt{2}$. Folglich erhalten wir die zwei Bedingungen

$$\cos\varphi = -\frac{(-1)^k}{\sqrt{2}} \text{ und } \sin\varphi = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}$$

Diese Gleichungen besitzen die gemeinsame Lösung $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ (falls k gerade) bzw. $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ (falls k ungerade) und liefern uns somit den Hauptwert des Arguments:

$$\varphi = \arg((1+i)^n) \overset{n\,=\,4k\,+\,3}{=} \arg((-4)^k \cdot (-2+2i)) = \begin{cases} \frac{3\pi}{4} & \text{, falls } k \text{ gerade} \\ -\frac{\pi}{4} & \text{, falls } k \text{ ungerade} \end{cases} \in]-\pi,\pi]$$

<u>zu (c): $\frac{4+6\sqrt{3}+i(4\sqrt{3}-6)}{2-3i}$</u>
Um zur gesuchten Darstellung zu gelangen, müssen wir den Zähler und den Nenner mit dem komplex-konjugierten des Nenners multiplizieren, d.h. wir erweitern den Bruch mit der komplexen Konjugation des Nenners:

$$\begin{aligned} \frac{4+6\sqrt{3}+i(4\sqrt{3}-6)}{2-3i} &= \frac{(4+6\sqrt{3}+i(4\sqrt{3}-6)) \cdot (2+3i)}{(2-3i)\cdot(2+3i)} \\ &= \frac{8+12\sqrt{3}+i(8\sqrt{3}-12)+12i+18\sqrt{3}i-12\sqrt{3}+18}{13} \\ &= \frac{8+12\sqrt{3}-12\sqrt{3}+18}{13} + i\frac{8\sqrt{3}-12+12+18\sqrt{3}}{13} \\ &= \frac{26}{13} + i\frac{26\sqrt{3}}{13} = 2 + i \cdot 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Kommen wir nun zum Betrag $\left|\frac{4+6\sqrt{3}+i(4\sqrt{3}-6)}{2-3i}\right|$:

$$\left|\frac{4+6\sqrt{3}+i(4\sqrt{3}-6)}{2-3i}\right| = \left|2+i\cdot 2\sqrt{3}\right| = \sqrt{(2+i\cdot 2\sqrt{3})\cdot(2-i\cdot 2\sqrt{3})} = \sqrt{4+4\cdot 3} = \sqrt{16} = 4$$

Kommen wir schlussendlich zu dem Argument $\arg\left(\frac{4+6\sqrt{3}+i(4\sqrt{3}-6)}{2-3i}\right)$. Wir stellen $\frac{4+6\sqrt{3}+i(4\sqrt{3}-6)}{2-3i}$ wieder wie gewohnt durch Polarkoordinaten dar

$$\frac{4+6\sqrt{3}+i(4\sqrt{3}-6)}{2-3i} = 2+i\cdot 2\sqrt{3} = 4\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$$

wobei $r = |2+i\cdot 2\sqrt{3}| = 4$. Folglich erhalten wir die zwei Bedingungen

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \text{ und } \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Diese Gleichungen besitzen die gemeinsame Lösung $\varphi = \frac{\pi}{3}$ und liefern uns somit den Hauptwert des Arguments:

$$\varphi = \arg\left(\frac{4+6\sqrt{3}+i(4\sqrt{3}-6)}{2-3i}\right) = \arg\left(2+i\cdot 2\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3} \in]-\pi,\pi]$$