Aufgabe 5

Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{C}$. Bezeichne mit $r_n \in \mathbb{R}_+$ und $\varphi_n \in]-\pi,\pi]$ die Polardarstellung von z_n, d.h. $z_n = r_n(\cos\varphi_n + i\cdot\sin\varphi_n)$.

(a): Man nehme an, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $z \in \mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$ konvergiert. Zeige, dass dann $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

(b): Was kann in den Fällen $z = 0$ und $z < 0$ passieren?

(c): Zeige, wenn $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, dass dann $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(d): Zeige, wenn $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen z konvergiert, dass dann auch folgender Ausdruck konvergiert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n} = z$$

Lösung:

zu (a):

i) 1. Möglichkeit: Die Konvergenz der Beträge folgt direkt, da für eine konvergente Folge gilt, dass auch die Folge ihrer Absolutbeträge konvergiert, d.h.

$$z_n \to z \text{ (für } z\to\infty) \implies r_n = |z_n| \to |z| = r \text{ (für } z\to\infty)$$

2. Möglichkeit: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Voraussetzung gilt $z_n \to z$ (für $n \to \infty$), d.h.

$$\exists\, N = N(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\ |z_n - z| \leqslant \varepsilon\ \forall\, n \geqslant N$$

Daraus und aus der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$|r_n - r| = ||z_n| - |z|| \overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leqslant} |z_n - z| \leqslant \varepsilon\ \forall\, n\geqslant N$$

ii) Für die Konvergenz der Argumente ist eine Fallunterscheidung notwendig.
1. Fall: $(\mathrm{Re}(z)\neq 0)$ Es gilt:

$$z_n \to z \text{ (für } n\to\infty) \implies \begin{cases} \mathrm{Re}(z_n) \to \mathrm{Re}(z) \neq 0 & \text{(für } n\to\infty) \\ \text{und} & \\ \mathrm{Im}(z_n) \to \mathrm{Im}(z) & \text{(für } n\to\infty) \end{cases}$$

Insbesondere gilt für den Grenzprozess des Realteils

$$\exists\, N\in\mathbb{N}\ \forall\, n\geqslant N:\ \mathrm{Re}(z_n)\neq 0$$

Weiter gilt $\forall\, n \geqslant N$:

$$\Psi_n := \tan(\varphi_n) = \frac{\sin(\varphi_n)}{\cos(\varphi_n)} = \frac{r_n\cdot\sin(\varphi_n)}{r_n\cdot\cos(\varphi_n)} = \frac{\mathrm{Im}(z_n)}{\mathrm{Re}(z_n)} \to \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)} = \frac{r\cdot\sin(\varphi)}{r\cdot\cos(\varphi)} = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \tan(\varphi) =: \Psi$$

Weiter gilt für φ

$$\mathrm{Re}(z)\neq 0 \iff r\cdot\cos(\varphi)\neq 0 \iff \cos(\varphi)\neq 0 \iff \varphi\in]-\pi,\pi]\backslash\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\}$$

Wegen $z \notin \mathbb{C}_-$ gilt sogar $\varphi \in]-\pi,\pi[\backslash\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\}$. Satz über die Umkehrfunktion: Die Funktion tan ist in den Intervallen $]-\pi,-\frac{\pi}{2}[$ (bzw. $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ und $]\frac{\pi}{2},\pi[$) stetig und streng monoton wachsend. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion bildet die Funktion tan die Intervalle $]-\pi,-\frac{\pi}{2}[$ (bzw. $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ und $]\frac{\pi}{2},\pi[$) bijektiv auf $\tan(]-\pi,-\frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$ (bzw. $\tan(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$ und $\tan(]\frac{\pi}{2},\pi[) = \mathbb{R}$) ab und die Umkehrfunktionen $\arctan:\mathbb{R}\to]-\pi,-\frac{\pi}{2}[$ (bzw. $\arctan:\mathbb{R}\to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ und $\arctan:\mathbb{R}\to]\frac{\pi}{2},\pi[$) sind ebenfalls stetig und streng monoton wachsend. Da arctan insbesondere im Punkt Ψ stetig ist, gilt nach dem Folgenkriterium der Stetigkeit speziell für die Folge $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\varphi_n = \arctan(\Psi_n) \to \arctan(\Psi) = \varphi \text{ (für } n\to\infty)$$

2. Fall: ($\mathrm{Re}(z) = 0$) Bemerkung am Rande:

$$\mathrm{Re}(z) = 0 \iff r \cdot \cos(\varphi) = 0 \overset{r\neq 0}{\iff} \cos(\varphi) = 0 \iff \varphi \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$$

Nach Teil i) und wegen $r \neq 0$ gilt:

$$\exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geqslant N : \ r_n \neq 0$$

Daher gilt $\forall\, n \geqslant N$:

$$\Psi_n := \sin(\varphi_n) = \frac{r_n \cdot \sin(\varphi_n)}{r_n} = \frac{\mathrm{Im}(z_n)}{r_n} \to \frac{\mathrm{Im}(z)}{r} = \frac{r \cdot \sin(\varphi)}{r} = \sin(\varphi) =: \Psi$$

Satz über die Umkehrfunktion: Die Funktion sin ist im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ stetig und streng monoton wachsend. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion bildet die Funktion sin das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ bijektiv auf $\sin(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = [-1, 1]$ ab und die Umkehrfunktion $\arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend. Da arcsin insbesondere im Punkt Ψ stetig ist, gilt nach dem Folgenkriterium der Stetigkeit speziell für die Folge $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\varphi_n = \arcsin(\Psi_n) \to \arcsin(\Psi) = \varphi \text{ (für } n \to \infty)$$

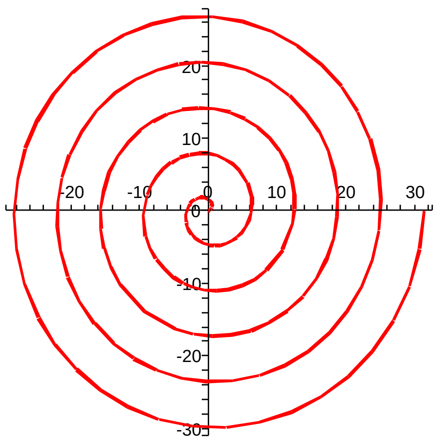
<u>zu (b):</u>
i) $z = 0$: Es sei $z_n \to z$ $(n \to \infty)$ und $z = 0$. In diesem Fall muss die Folge der Argumente nicht notwendig konvergieren, d.h. um die Konvergenzeigenschaft

$$z_n = r_n\,(\cos\varphi_n + i \cdot \sin\varphi_n) \longrightarrow 0 \text{ (für } n \to \infty)$$

zu gewährleisten, genügt

$$r_n \to 0 \text{ (für } n \to \infty)$$
$$\varphi_n \nrightarrow 0 \text{ (für } n \to \infty)$$

Exemplarisch betrachte das folgende Diagramm



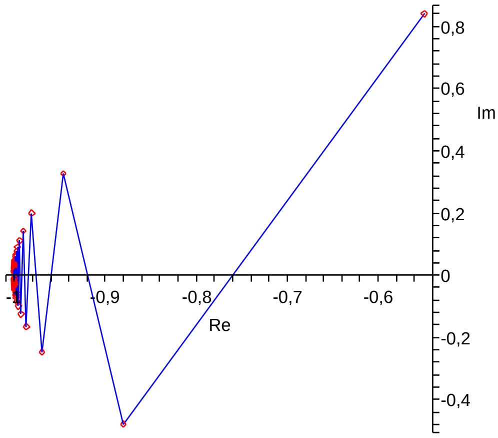
ii) $z < 0$: Es sei $z_n \to z$ $(n \to \infty)$ und $z < 0$ (genauer: $z \in \mathbb{R}^*_-$). Eine erste Feststellung ist, dass der Grenzwert φ der Folge der Argumente $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht eindeutig bestimmt sein muss. Dazu betrachten wir exemplarisch die gegen π bzw. $-\pi$ konvergenten Folgen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]-\pi, \pi]$

$$\varphi_n := -\left(\frac{1}{n} - \pi\right) \to \pi \text{ (für } n \to \infty)$$
$$\varphi_n := \frac{1}{n} - \pi \to -\pi \text{ (für } n \to \infty)$$

Eine zweite Feststellung ist, dass die Folge der Argumente $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ überhaupt gar nicht konvergieren muss. Exemplarisch betrachten wir dazu die divergente Folge

$$\varphi_n := (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{n} - \pi\right) = (-1)^n \cdot \frac{1-n\pi}{n}$$

Diese Folge besitzt die Häufungspunkte π (für $n \to \infty$ und n ungerade) und $-\pi$ (für $n \to \infty$ und n gerade).



zu (c):
Nach Voraussetzung gilt:

$$\begin{aligned}
&\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geqslant N_1 :\ |r_n - r| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \\
&\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geqslant N_2 :\ |\varphi_n - \varphi| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}$$

Da die Funktion cos (bzw. sin) im Punkt $\varphi \in [-\pi, \pi]$ stetig ist, gilt aufgrund des Folgenkriteriums der Stetigkeit für jede gegen φ konvergente Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dass $\cos(\varphi_n) \to \cos(\varphi)$ (bzw. $\cos(\varphi_n) \to \cos(\varphi)$). Daher gilt folglich:

$$\begin{aligned}
&\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_3 = N_3(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geqslant N_3 :\ |\cos(\varphi_n) - \cos(\varphi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4(|r|+1)} \\
&\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_4 = N_4(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geqslant N_4 :\ |\sin(\varphi_n) - \sin(\varphi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4(|r|+1)}
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die gewünschte Konvergenz: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest und sei o.B.d.A. $\varepsilon \leqslant 1$, dann gilt $\forall\, n \geqslant \max\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$:

$$\begin{aligned}
|z_n - z| &= |r_n(\cos(\varphi_n) - i \cdot \sin(\varphi_n)) - r\,(\cos(\varphi) - i \cdot \sin(\varphi))| \\
&\leqslant |r_n \cos(\varphi_n) - r\cos(\varphi)| + |(-i) \cdot (r_n \sin(\varphi_n) - r\sin(\varphi))| \\
&= |r_n \cos(\varphi_n) - r_n \cos(\varphi) + r_n \cos(\varphi) - r\cos(\varphi)| \\
&\quad + \underbrace{|-i|}_{=1} \cdot |r_n \sin(\varphi_n) - r_n \sin(\varphi) + r_n \sin(\varphi) - r\sin(\varphi)| \\
&\leqslant \underbrace{|r_n|}_{\leqslant |r|+1} \cdot \underbrace{|\cos(\varphi_n) - \cos(\varphi)|}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{4(|r|+1)}} + \underbrace{|r_n - r|}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{4}} \cdot \underbrace{|\cos(\varphi)|}_{\leqslant 1} \\
&\quad + \underbrace{|r_n|}_{\leqslant |r|+1} \cdot \underbrace{|\sin(\varphi_n) - \sin(\varphi)|}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{4(|r|+1)}} + \underbrace{|r_n - r|}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{4}} \cdot \underbrace{|\sin(\varphi)|}_{\leqslant 1} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Tatsache verwendet, dass $\forall\, n \geqslant N_1$:

$$|r_n| - |r| \leqslant |r_n - r| \leqslant \varepsilon \implies |r_n| \leqslant |r| + \underbrace{\varepsilon}_{\leqslant 1} \leqslant |r| + 1$$

zu (d):
Nach Voraussetzung gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geqslant N: \ |z_n - z| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Setze $C := \max\{|z_i - z| \mid i = 1, \ldots, N\}$. Damit gilt $\forall\, n > N$:

$$\begin{aligned}\left|\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{z_i}{n}\right) - z\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{z_i}{n} - \frac{z}{n}\right| = \left|\frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} z_i - z\right)\right| \leqslant \left|\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{N} z_i - z\right)\right| + \left|\frac{1}{n}\left(\sum_{i=N+1}^{n} z_i - z\right)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{N} |z_i - z|}_{\leqslant N \cdot C} + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=N+1}^{n} \underbrace{|z_i - z|}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{2}} \leqslant C\frac{N}{n} + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=N+1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} = C\frac{N}{n} + \frac{n-N}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \underbrace{C\frac{N}{n}}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\left(1 - \frac{N}{n}\right)}_{\leqslant 1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

Aufgabe 6

Seien $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ positive reelle Konstanten und $t \in \mathbb{R}$ eine reelle Variable. Welche Kurven in der komplexen Ebene werden durch die folgenden Funktionen beschrieben:

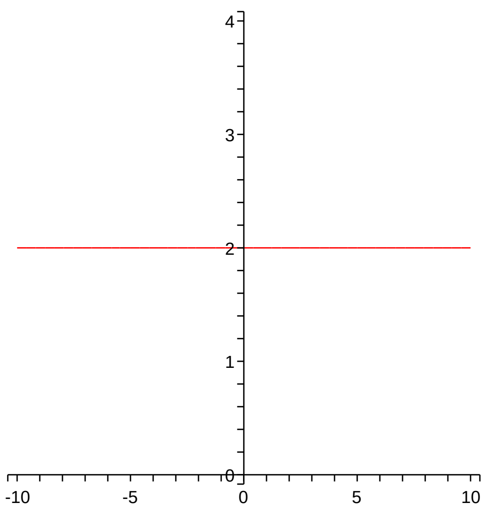
(a): $t \longmapsto ia + at$

(b): $t \longmapsto -ibe^{-it}$

(c): $t \longmapsto ia + at - ibe^{-it}$

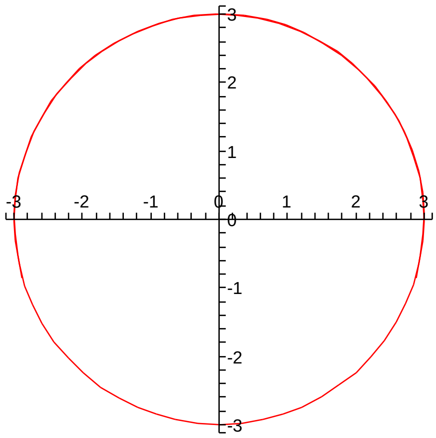
Lösung:

zu (a): Die Kurve beschreibt eine parallel zur x-Achse von links nach rechts verlaufende Gerade, die um $a > 0$ nach oben verschobene ist. Exemplarisch betrachten wir das folgende Diagramm speziell für $a = 2$:



Zusatzfrage: Was passiert für $a = 0$ bzw. $a < 0$. Antwort: Für $a = 0$ ist das Bild der Kurve gerade der Ursprung der komplexen Ebene. Für $a < 0$ ist die Gerade bezüglich der x-Achse nach unten verschoben und läuf in entgegengesetzter Richtung, d.h. von rechts nach links.

zu (b): Die Kurve beschreibt die im Uhrzeigersinn durchlaufende Kreislinie. Der Kreis besitzt hierbei den Radius $-ib$ und das Zentrum ist der Ursprung der komplexen Ebene. Beachte: Bei der Kurve $t \longmapsto e^{-it}$ (bzw. $t \longmapsto e^{it}$) wird die Kreislinie im Uhrzeigersinn (bzw. entgegengesetzt des Uhrzeigersinns) durchlaufen. Exemplarisch betrachten wir das folgende Diagramm speziell für $b = 3$:

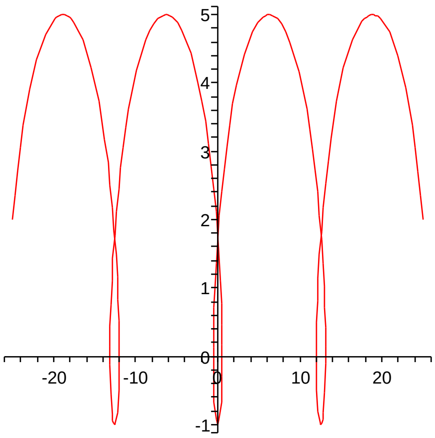


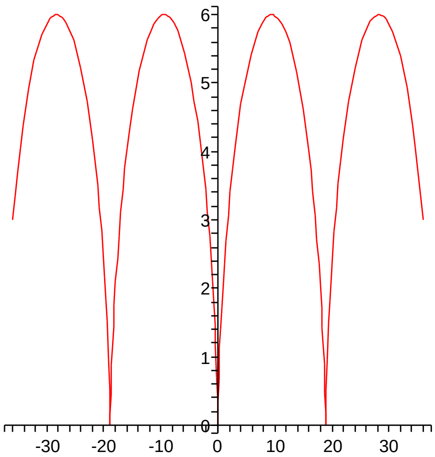
Alternativ lässt sich die Funktion auch darstellen durch

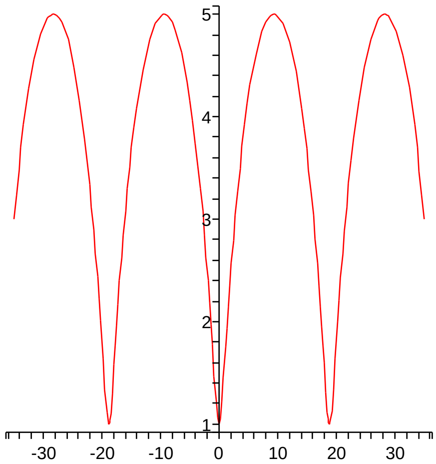
$$-ibe^{-it} = -ib\,(\cos(-t) + i \cdot \sin(-t)) = -ib\,(\cos(t) - i \cdot \sin(t)) = -b\,(\sin(t) + i \cdot \cos(t))$$

Hierbei haben wir die Eulersche Formel sowie die Eigenschaften $\cos(-t) = \cos(t)$ (d.h. cos ist eine gerade Funktion) und $\sin(-t) = -\sin(t)$ (d.h. sin ist eine ungerade Funktion) verwendet.

zu (c): Diese Kurve beschreibt eine Zykloide - auch zykloidische Kurve, Radkurve oder Rollkurve genannt -, die von links nach rechts durchlaufen wird. Dabei liegen die Hochpunkte (bzw. Tiefpunkte) dieser Kurve bei $(2n+1)\pi a + i(a+b)$ (bzw. $2n\pi a + i(a-b)$), wobei $n \in \mathbb{Z}$. Hierbei sollten wir die drei Fälle $a < b$ (verlängerte Zykloide), $a = b$ (gewöhnliche Zykloide) und $a > b$ (verkürzte Zykloide) unterscheiden. Exemplarisch betrachten wir dazu die folgenden Diagramme speziell für $a = 2$ und $b = 3$ (oben links), $a = 3$ und $b = 3$ (oben rechts) sowie $a = 3$ und $b = 2$ (unten):







Aufgabe 7

(a): Ist die Funktion $f(z) = \frac{1}{1-z}$ im Inneren des Einheitskreises $\overset{\circ}{\mathbb{E}}$ bzw. im abgeschlossenen Einheitskreis $\mathbb{E}$ stetig? Ist sie dort auch gleichmäßig stetig?

(b): In $0 < |z| < 1$ sei $f(z) = e^{-\frac{1}{|z|}}$. Ist diese Funktion dort stetig? Kann man sie auf $|z| \leqslant 1$ stetig fortsetzen?

Lösung:

zu (a):

i) Seien $a \in \overset{\circ}{\mathbb{E}}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Setze $\delta := \min\left(\frac{|1-a|}{2}, \frac{|1-a|^2 \cdot \varepsilon}{2}\right)$. Dann gilt $\forall\, z \in \overset{\circ}{\mathbb{E}}$ mit $|z-a| < \delta$:

$$\left|\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-a}\right| = \left|\frac{1-a-1+z}{(1-z)(1-a)}\right| = \frac{|z-a|}{|1-a|} \cdot \underbrace{\frac{1}{|1-z|}}_{\leqslant \frac{2}{|1-a|}} \leqslant \frac{2}{|1-a|^2} \cdot \underbrace{|z-a|}_{<\delta}$$

$$< \frac{2}{|1-a|^2} \cdot \delta < \frac{2}{|1-a|^2} \cdot \frac{|1-a|^2 \cdot \varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dabei folgt die Ungleichung $\frac{1}{|1-z|} \leqslant \frac{2}{|1-a|}$ aus

$$|1-a| - |1-z| \leqslant |1-a-(1-z)| = |z-a| < \delta < \frac{|1-a|}{2}$$

$$\Longrightarrow \frac{|1-a|}{2} < |1-z| \Longrightarrow \frac{2}{|1-a|} \geqslant \frac{1}{|1-z|}$$

Damit ist f stetig in jedem Punkt $a \in \overset{\circ}{\mathbb{E}}$ und somit in $\overset{\circ}{\mathbb{E}}$.

ii) f ist aber nicht gleichmäßig stetig in $\overset{\circ}{\mathbb{E}}$, da man δ nicht unabhängig von a wählen kann. Widerspruchsbeweis: Angenommen f ist gleichmäßig stetig in $\overset{\circ}{\mathbb{E}}$, dann gibt es insbesondere zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \left|\frac{1}{1-z_1} - \frac{1}{1-z_2}\right| < 1 \;\forall\, z_1, z_2 \in \overset{\circ}{\mathbb{E}} \text{ mit } |z_1 - z_2| < \delta$$

Es gibt aber ein $n \in \mathbb{C}\backslash\overset{\circ}{\mathbb{E}}$ mit $|n| > 1$ (d.h. $\frac{1}{n} \in \overset{\circ}{\mathbb{E}}$, da $|\frac{1}{n}| < 1$) mit

$$\left|\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right| < \delta$$

und

$$\left|f\left(1 - \frac{1}{n}\right) - f\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right| = \left|\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)} - \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{2n}\right)}\right| = |n - 2n| = |n| > 1$$

iii) Da sich die Funktion $f(z) = \frac{1}{1-z}$ nicht in $\partial\mathbb{E}$ fortsetzen lässt, ist sie dort nicht definiert. Daher kann sie in $\partial\mathbb{E}$ weder stetig noch gleichmäßig stetig sein. *(Merkregel: Bei gebrochen rationalen Funktionen lässt es sich in den meisten Fällen leicht zeigen, ob sich eine Funktion in einem kritischen Punkt fortsetzen lässt. Dazu setzt man die kritische Stelle, also die Nullstelle des Nenners (hier: $z = 1$), in den Zähler und den Nenner ein. Der Nenner wird trivialerweise 0. Wird der Zähler auch 0, so lässt sich die Funktion an der Stelle (stetig) fortsetzen, andernfalls nicht. Mathematisch korrekt muss man jedoch zeigen, dass der links- und rechtsseitige Grenzwert existiert, endlich ist und übereinstimmt. In diesem Fall lässt sich die Funktion fortsetzen.)*

zu (b):

i) Es bezeichne $\overset{\circ}{\mathbb{E}}{}^{\bullet}$ den im Ursprung gelochten offenen Einheitskreis in der komplexen Ebene. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&f_1(z) := \frac{1}{z} : \overset{\circ}{\mathbb{E}}{}^{\bullet} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ stetig (Aufgabe 7(a)+Translation)}\\
&f_2(z) := |\bullet| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \text{ stetig}\\
&f_3(z) := e^{-z} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ stetig}
\end{aligned}$$

Es folgt, dass die Funktion $f(z) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z) = e^{-\frac{1}{|z|}}$ stetig ist, da die Komposition stetiger Funktionen wieder eine stetige Funktion erzeugt. Der Definitionsbereich der Funktion f ist durch $\overset{\circ}{\mathbb{E}}{}^{\bullet}$ gegeben, denn es gilt für den Wertevorrat:

$$f_1(\overset{\circ}{\mathbb{E}}{}^{\bullet}) \subset \mathbb{C} = \mathcal{D}(f_2) \text{ und } f_2(\mathbb{C}) = \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{C} = \mathcal{D}(f_3)$$

Damit ist f stetig in $\overset{\circ}{\mathbb{E}}{}^{\bullet}$.

ii) Es gilt sogar, dass $f_1(z) = \frac{1}{z} : \mathbb{C}^{\bullet} \longrightarrow \mathbb{C}$ und somit auch $f(z) = e^{-\frac{1}{|z|}} : \mathbb{C}^{\bullet} \longrightarrow \mathbb{C}$ in $\mathbb{C}^{\bullet}$ stetig ist. Damit lässt sich die Funktion f insbesondere in den Rand stetig fortsetzen. Weiter gilt der Grenzprozess

$$\lim_{z \to 0} e^{-\frac{1}{|z|}} = 0$$

Damit lässt sich die Funktion f auch in den Ursprung durch $f(0) := 0$ stetig fortsetzen. Insgesamt erhalten wir:

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mit } f(z) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{|z|}} & \text{, falls } z \neq 0 \\ 0 & \text{, falls } z = 0 \end{cases} \text{ ist stetig}$$

Aufgabe 8

Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{C}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \infty$. Zeige, dass eine Häufungsrichtung existiert, d.h. es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass für jedes $\varepsilon > 0$ die Teilfolge der Partialsummen $\sum_{n=1}^{N} z_n$ mit Argumenten in $]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$ eine absolut divergente Teilsumme besitzt.

Lösung:

Wir zeigen

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}\ \forall\, \varepsilon > 0 : \left(\sum_{n=1}^{N} z_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ist absolut divergent mit Argument in }]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$$

Dazu: Wähle θ derart (d.h. so groß), dass

$$\arg\left(\sum_{n=1}^{N} z_n\right) \in [0, \theta] \quad \forall\, N \in \mathbb{N}$$

Nun halbieren wir das Intervall $[0, \theta]$

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \{N_1 \in \mathbb{N} \mid \arg\left(\sum_{n=1}^{N_1} z_n\right) \in [0, \frac{\theta}{2}]\}\\
I_2 &:= \{N_2 \in \mathbb{N} \mid \arg\left(\sum_{n=1}^{N_2} z_n\right) \in [\frac{\theta}{2}, \theta]\}
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\infty = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \lim_{\substack{N_1 \to \infty \\ N_1 \in I_1}} \sum_{n=1}^{N_1} |z_n| + \lim_{\substack{N_2 \to \infty \\ N_2 \in I_1}} \sum_{n=1}^{N_2} |z_n|$$

Da die linke Summe (nach Vorraussetzung) unendlich ist, muss mindestens einer der beiden Grenzwerte auf der rechten Seite unendlich sein. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass dies für den linken Grenzwert gilt, d.h. $\lim_{\substack{N_1 \to \infty \\ N_1 \in I_1}} \sum_{n=1}^{N_1} |z_n| = \infty$. Jetzt wiederholen wir diesen Prozess, indem wir das Intervall $[0, \frac{\theta}{2}]$ halbieren:

$$I_{1,1} := \{N_{1,1} \in \mathbb{N} \mid \arg\left(\sum_{n=1}^{N_{1,1}} z_n\right) \in [0, \frac{\theta}{4}]\}$$
$$I_{1,2} := \{N_{1,2} \in \mathbb{N} \mid \arg\left(\sum_{n=1}^{N_{1,2}} z_n\right) \in [\frac{\theta}{4}, \frac{\theta}{2}]\}$$

Wir erhalten erneut

$$\infty = \lim_{\substack{N_1 \to \infty \\ N_1 \in I_1}} \sum_{n=1}^{N_1} |z_n| = \lim_{\substack{N_{1,1} \to \infty \\ N_{1,1} \in I_{1,1}}} \sum_{n=1}^{N_{1,1}} |z_n| + \lim_{\substack{N_{1,2} \to \infty \\ N_{1,2} \in I_{1,2}}} \sum_{n=1}^{N_{1,2}} |z_n|$$

und wieder muss mindestens einer der Grenzwerte unendlich sein. Diesen Prozess können wir beliebig fortführen. Da wir die Intervalle halbieren, gibt es nach dem Intervallschachtlungs-Prinzip ein $\alpha \in [0, \theta]$, dass in allen dieser Intervalle liegt.
Ergänzung: Im allgemeinen gibt es mehrere Häufungsrichtungen, sobald die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ nicht konvergiert. Beispielsweise erhalten wir für $z_n := (-1)^n 2^n$ die zwei Häufungsrichtungen 0 und π und für $z_n := i^n 2^n$ sogar vier Häufungsrichtungen.