Aufgabe 9

Betrachte die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für die elementaren Funktionen

(a): $f(z) = z^n$, für $n \in \mathbb{N}$
(b): $f(z) = e^z$
(c): $f(z) = \sin z$
(d): $f(z) = \tan z$

Für welche z sind diese Funktionen komplex differenzierbar?

Lösung:

Erinnerung: $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, $u := \mathrm{Re}(f) : U \to \mathbb{R}$, $v := \mathrm{Im}(f) : U \to \mathbb{R}$, $z_0 \in U$, f in z_0 reell-differenzierbar (d.h. u und v total differenzierbar in z_0), $z = x + iy = re^{i\varphi}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1): f ist in z_0 komplex differenzierbar

(2): $$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}$$
(Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen)

(3): $$i \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$
(Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen)

(4): $$\frac{\partial u}{\partial r}(z_0) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} \text{ und } \frac{\partial u}{\partial \varphi}(z_0) = -r \cdot \frac{\partial v}{\partial r}$$
(Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen für Polarform)

(5): $$\frac{\partial f}{\partial r}(z_0) = \frac{1}{ir} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi}(z_0)$$
(Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen für Polarform)

(6): $$f_{\overline{z}}(z_0) = 0$$
(Wirtinger Ableitung)

(7): $\exists\, L_{z_0} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear $\wedge$ $\exists\, \Phi_{z_0} : U \to \mathbb{C}$ stetig in z_0 mit $\Phi_{z_0}(z_0) = 0 \;\forall\, z \in U$:
$$f(z) = f(z_0) + L_{z_0}(z - z_0) + \Phi_{z_0}(z) \cdot |z - z_0|$$

(8): $\exists\, L_{z_0} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear :
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - L_{z_0}(z - z_0)}{z - z_0} = 0$$

(9): $\exists\, \hat{f}_1 : U \to \mathbb{C}$ stetig in z_0 $\forall\, z \in U$:
$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot \hat{f}_1(z_0)$$

(10): Der Grenzwert
$$f'(z_0) := \lim_{\substack{h \to 0 \\ h + z_0 \in U}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad \left(\text{bzw. } f'(z_0) := \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in U}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right)$$
existiert.

Im Falle der komplexen Differenzierbarkeit gilt:
$$f'(z_0) = f_z(z_0) = f_x(z_0) = -i f_y(z_0)$$

Weiter ist in diesem Fall $L_{z_0} = f'(z_0) = f_z(z_0)$ eindeutig. Der Zusammenhang zwischen den Funktionen sollte nun deutlich werden:
$$f_x(z_0) = u_x(z_0) + i v_x(z_0)$$
$$f_y(z_0) = u_y(z_0) + i v_y(z_0)$$

$$f_z(z_0) = \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) + i f_y(z_0)\right) = \frac{1}{2}\left(u_x(z_0) + v_y(z_0) + i(-u_y(z_0) + v_x(z_0))\right)$$
$$f_{\overline{z}}(z_0) = \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) + i f_y(z_0)\right) = \frac{1}{2}\left(u_x(z_0) - v_y(z_0) + i(u_y(z_0) + v_x(z_0))\right)$$

zu (a): $f(z) = z^n$ (mit $n \in \mathbb{N}$)

Nachweis von (2): Für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist nach dem binomischen Lehrsatz und Aufgabe 4(a)

$$\begin{aligned}
z^n &= (x+iy)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} (iy)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k i^k \\
&= \sum_{\substack{k=4l\\ l\in\mathbb{Z}\\ 0\leqslant k\leqslant n}} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \underbrace{i^k}_{=1} + \sum_{\substack{k=4l+1\\ l\in\mathbb{Z}\\ 0\leqslant k\leqslant n}} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \underbrace{i^k}_{=i} + \sum_{\substack{k=4l+2\\ l\in\mathbb{Z}\\ 0\leqslant k\leqslant n}} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \underbrace{i^k}_{=-1} + \sum_{\substack{k=4l+3\\ l\in\mathbb{Z}\\ 0\leqslant k\leqslant n}} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \underbrace{i^k}_{=-i} \\
&= \left[\sum_{\substack{k=4l\\ l\in\mathbb{Z}\\ 0\leqslant k\leqslant n}} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k - \sum_{\substack{k=4l+2\\ l\in\mathbb{Z}\\ 0\leqslant k\leqslant n}} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k\right] + i\left[\sum_{\substack{k=4l+1\\ l\in\mathbb{Z}\\ 0\leqslant k\leqslant n}} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k - \sum_{\substack{k=4l+3\\ l\in\mathbb{Z}\\ 0\leqslant k\leqslant n}} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k\right]
\end{aligned}$$

Also lässt sich f in Real- und Imaginärteil zerlegen $f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ mit

$$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } u(x,y) := \sum_{\substack{k=4l\\ l\in\mathbb{Z}\\ 0\leqslant k\leqslant n}} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k - \sum_{\substack{k=4l+2\\ l\in\mathbb{Z}\\ 0\leqslant k\leqslant n}} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$
$$v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } v(x,y) := \sum_{\substack{k=4l+1\\ l\in\mathbb{Z}\\ 0\leqslant k\leqslant n}} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k - \sum_{\substack{k=4l+3\\ l\in\mathbb{Z}\\ 0\leqslant k\leqslant n}} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Wir sehen, dass die Funktionen u und v (als reelle Polynomfunktionen) überall total differenzierbar sind (d.h. reell differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$) und zudem sind in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt. Um das einzusehen, müssen wir lediglich eine Indexverschiebung machen:

$$\begin{aligned}
\partial_x u(x,y) &= \sum_{\substack{k=4l\\ l\in\mathbb{Z}\\ 0\leqslant k\leqslant n-1}} \binom{n}{k} (n-k) x^{n-k-1} y^k - \sum_{\substack{k=4l+2\\ l\in\mathbb{Z}\\ 0\leqslant k\leqslant n-1}} \binom{n}{k} (n-k) x^{n-k-1} y^k \\
&= \sum_{\substack{k=4l+1\\ l\in\mathbb{Z}\\ 1\leqslant k\leqslant n}} \binom{n}{k} k x^{n-k} y^{k-1} - \sum_{\substack{k=4l+3\\ l\in\mathbb{Z}\\ 1\leqslant k\leqslant n}} \binom{n}{k} k x^{n-k} y^{k-1} \\
&= \partial_y v(x,y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_y u(x,y) &= \sum_{\substack{k=4l\\ l\in\mathbb{Z}\\ 1\leqslant k\leqslant n}} \binom{n}{k} k x^{n-k} y^{k-1} - \sum_{\substack{k=4l+2\\ l\in\mathbb{Z}\\ 1\leqslant k\leqslant n}} \binom{n}{k} k x^{n-k} y^{k-1} \\
&= \sum_{\substack{k=4l+3\\ l\in\mathbb{Z}\\ 0\leqslant k\leqslant n-1}} \binom{n}{k} (n-k) x^{n-k-1} y^k - \sum_{\substack{k=4l+1\\ l\in\mathbb{Z}\\ 0\leqslant k\leqslant n-1}} \binom{n}{k} (n-k) x^{n-k-1} y^k \\
&= -\partial_x v(x,y)
\end{aligned}$$

Damit ist die Funktion $f(z) = z^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf ganz $\mathbb{C}$ (d.h. für jedes $z \in \mathbb{C}$) komplex differenzierbar.

Nachweis von (4): Für $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(z) = z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{i\varphi n} = r^n(\cos(\varphi n) + i\sin(\varphi n))$$

Also lässt sich f in Real- und Imaginärteil zerlegen $f(re^{i\varphi}) = u(r,\varphi) + i \cdot v(r,\varphi)$ mit

$$u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } u(r,\varphi) := r^n \cos(\varphi n)$$
$$v : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } v(r,\varphi) := r^n \sin(\varphi n)$$

Wir sehen auch hier wieder, dass die Funktionen u und v überall total differenzierbar sind (d.h. reell differenzierbar) und zudem sind in jedem Punkt $z = (r,\varphi)$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, denn mit $z = re^{i\varphi}$ haben wir:

$$\frac{\partial u}{\partial r}(z) = nr^{n-1}\cos(\varphi n) = \frac{1}{r} nr^n \cos(\varphi n) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}(z)$$
$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}(z) = -nr^n \sin(\varphi n) = -rnr^{n-1}\sin(\varphi n) = -r \cdot \frac{\partial v}{\partial r}(z)$$

Damit ist die Funktion $f(z) = z^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf ganz $\mathbb{C}$ (d.h. für jedes $z \in \mathbb{C}$) komplex differenzierbar.
Nachweis von (6): Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen $f(z) = (x+iy)^n$:

$$f_x(z) = f_x(x+iy) = n(x+iy)^{n-1} = nz^{n-1}$$
$$f_y(z) = f_y(x+iy) = in(x+iy)^{n-1} = inz^{n-1}$$

Damit verschwindet die Wirtinger Ableitung in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, denn:

$$f_{\overline{z}}(z_0) = \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) + if_y(z_0)\right) = \frac{1}{2}\left(nz^{n-1} - nz^{n-1}\right) = 0$$

Damit ist die Funktion $f(z) = z^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf ganz $\mathbb{C}$ (d.h. für jedes $z \in \mathbb{C}$) komplex differenzierbar.
zu (b): $f(z) = e^z$
Nachweis von (2): Für $z \in \mathbb{C}$ ist

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \cdot \sin y) = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y$$

Also lässt sich f in Real- und Imaginärteil zerlegen $f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ mit

$$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } u(x,y) := e^x \cos y$$
$$v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } v(x,y) := e^x \sin y$$

Wir sehen, dass die Funktionen u und v überall total differenzierbar sind (d.h. reell differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$) und zudem sind in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt

$$\partial_x u(x,y) = e^x \cos y = \partial_y v(x,y)$$
$$\partial_y u(x,y) = -e^x \sin y = -\partial_x v(x,y)$$

Damit ist die Funktion $f(z) = e^z$ auf ganz $\mathbb{C}$ (d.h. für jedes $z \in \mathbb{C}$) komplex differenzierbar.
Nachweis von (4): Für $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(z) = e^z = e^{r\left(e^{i\varphi}\right)} = e^{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = e^{r\cos\varphi}e^{ir\sin\varphi} = e^{r\cos\varphi}(\cos(r\sin\varphi) + i\sin(r\sin\varphi))$$

Also lässt sich f in Real- und Imaginärteil zerlegen $f(re^{i\varphi}) = u(r,\varphi) + i \cdot v(r,\varphi)$ mit

$$u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } u(r,\varphi) := e^{r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi)$$
$$v : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } v(r,\varphi) := e^{r\cos\varphi}\sin(r\sin\varphi)$$

Wir sehen auch hier wieder, dass die Funktionen u und v überall total differenzierbar sind (d.h. reell differenzierbar) und zudem sind in jedem Punkt $z = (r,\varphi)$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, denn mit $z = re^{i\varphi}$ haben wir:

$$\frac{\partial u}{\partial r}(z) = e^{r\cos\varphi}(\cos\varphi \cdot \cos(r\sin\varphi) - \sin\varphi \cdot \sin(r\sin\varphi)) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}(z)$$
$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}(z) = -re^{r\cos\varphi}(\sin\varphi \cdot \cos(r\sin\varphi) + \cos\varphi \cdot \sin(r\sin\varphi)) = -r \cdot \frac{\partial v}{\partial r}(z)$$

Damit ist die Funktion $f(z) = e^z$ auf ganz $\mathbb{C}$ (d.h. für jedes $z \in \mathbb{C}$) komplex differenzierbar.
Nachweis von (6): Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt wegen $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$:

$$\begin{aligned} f_x(z) &= f_x(x+iy) = e^x e^{iy} = e^z \\ f_y(z) &= f_y(x+iy) = ie^x e^{iy} = ie^z \end{aligned}$$

Damit verschwindet die Wirtinger Ableitung in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, denn:

$$f_{\overline{z}}(z_0) = \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) + if_y(z_0)\right) = \frac{1}{2}\left(e^z - e^z\right) = 0$$

Damit ist die Funktion $f(z) = e^z$ auf ganz $\mathbb{C}$ (d.h. für jedes $z \in \mathbb{C}$) komplex differenzierbar.
<u>zu (c):</u> $f(z) = \sin z$
Nachweis von (2): Für $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\begin{aligned} f(z) = \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i}(e^{ix-y} - e^{-ix+y}) = \frac{1}{2i}e^{ix}e^{-y} - \frac{1}{2i}e^{-ix}e^{y} \\ &= \frac{1}{2i}(\cos(x) + i\cdot\sin(x))e^{-y} - \frac{1}{2i}(\cos(-x) + i\cdot\sin(-x))e^{y} \\ &= i\left(-\frac{1}{2}\right)\cos(x)e^{-y} + \frac{1}{2}\sin(x)e^{-y} + i\frac{1}{2}\underbrace{\cos(-x)}_{=\cos(x)}e^{y} - \frac{1}{2}\underbrace{\sin(-x)}_{=-\sin(x)}e^{y} \\ &= \frac{1}{2}\sin(x)(e^{y} + e^{-y}) + i\frac{1}{2}\cos(x)(e^{y} - e^{-y}) \\ &= \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y) \end{aligned}$$

Also lässt sich f in Real- und Imaginärteil zerlegen $f(x+iy) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$ mit

$$\begin{aligned} u &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } u(x,y) := \frac{1}{2}\sin(x)(e^{y} + e^{-y}) = \sin(x)\cosh(y) \\ v &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } v(x,y) := \frac{1}{2}\cos(x)(e^{y} - e^{-y}) = \cos(x)\sinh(y) \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Funktionen u und v überall total differenzierbar sind (d.h. reell differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$) und zudem sind in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt

$$\begin{aligned} \partial_x u(x,y) &= \frac{1}{2}\cos(x)(e^{y} + e^{-y}) = \partial_y v(x,y) \\ \partial_y u(x,y) &= \frac{1}{2}\sin(x)(e^{y} - e^{-y}) = -\partial_x v(x,y) \end{aligned}$$

Damit ist die Funktion $f(z) = \sin z$ auf ganz $\mathbb{C}$ (d.h. für jedes $z \in \mathbb{C}$) komplex differenzierbar.
Nachweis von (4): Für $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} f(z) = \sin(z) &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \frac{i}{2}\left(e^{i\left(re^{i\varphi}\right)} - e^{-i\left(re^{i\varphi}\right)}\right) \\ &= \frac{i}{2}\left(e^{-r\sin\varphi}e^{ir\cos\varphi} - e^{r\sin\varphi}e^{-ir\cos\varphi}\right) \\ &= \frac{i}{2}\left(e^{-r\sin\varphi}\left[\cos(r\cos\varphi) + i\sin(r\cos\varphi)\right] - e^{r\sin\varphi}\left[\cos(-r\cos\varphi) - i\sin(r\cos\varphi)\right]\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\sin(r\cos\varphi)\left[e^{-r\sin\varphi} + e^{r\sin\varphi}\right] + i\cos(r\cos\varphi)\left[e^{-r\sin\varphi} - e^{r\sin\varphi}\right]\right) \end{aligned}$$

Also lässt sich f in Real- und Imaginärteil zerlegen $f(re^{i\varphi}) = u(r,\varphi) + i\cdot v(r,\varphi)$ mit

$$\begin{aligned} u &: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } u(r,\varphi) := -\frac{1}{2}\sin(r\cos\varphi)\left[e^{-r\sin\varphi} + e^{r\sin\varphi}\right] \\ v &: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } v(r,\varphi) := \frac{1}{2}\cos(r\cos\varphi)\left[e^{-r\sin\varphi} - e^{r\sin\varphi}\right] \end{aligned}$$

Wir sehen auch hier wieder, dass die Funktionen u und v überall total differenzierbar sind (d.h. reell differenzierbar) und zudem sind in jedem Punkt $z = (r, \varphi)$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, denn mit $z = re^{i\varphi}$ haben wir:

$$\frac{\partial u}{\partial r}(z) = -\frac{1}{2}\cos(r\cos\varphi)\cos\varphi\left[e^{-r\sin\varphi} + e^{r\sin\varphi}\right] - \frac{1}{2}\sin(r\cos\varphi)\sin\varphi\left[e^{r\sin\varphi} - e^{-r\sin\varphi}\right] = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial\varphi}(z)$$
$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}(z) = \frac{1}{2}\cos(r\cos\varphi)r\sin\varphi\left[e^{-r\sin\varphi} + e^{r\sin\varphi}\right] - \frac{1}{2}\sin(r\cos\varphi)r\cos\varphi\left[e^{r\sin\varphi} - e^{-r\sin\varphi}\right] = -r\cdot\frac{\partial v}{\partial r}(z)$$

Damit ist die Funktion $f(z) = \sin z$ auf ganz $\mathbb{C}$ (d.h. für jedes $z \in \mathbb{C}$) komplex differenzierbar.
Nachweis von (6): Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt wegen $f(z) = \sin(z) = \sin(x + iy)$:

$$f_x(z) = f_x(x+iy) = \cos(x+iy) = \cos(z)$$
$$f_y(z) = f_y(x+iy) = i\cos(x+iy) = i\cos(z)$$

Damit verschwindet die Wirtinger Ableitung in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, denn:

$$f_{\overline{z}}(z_0) = \frac{1}{2}\left(f_x(z_0) + if_y(z_0)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(z) - \cos(z)\right) = 0$$

Damit ist die Funktion $f(z) = \sin z$ auf ganz $\mathbb{C}$ (d.h. für jedes $z \in \mathbb{C}$) komplex differenzierbar.
zu (d): $f(z) = \tan z$
Nachweis von (2): Wegen $f(z) = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ ist der Tangens in den Nullstellen der Cosinusfunktion nicht definiert, d.h. es ist $\tan : D \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $D := \mathbb{C}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Für $z \in D$ ist

$$f(z) = \tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}{\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}} = \frac{\frac{e^{-y+ix}-e^{y-ix}}{2i}}{\frac{e^{-y+ix}+e^{y-ix}}{2}} = \frac{2(e^{-y+ix} - e^{y-ix})}{2i(e^{-y+ix} + e^{y-ix})}$$
$$= \frac{e^{-y}(\cos(x) + i\cdot\sin(x)) - e^{y}(\cos(-x) + i\cdot\sin(-x))}{i(e^{-y}(\cos(x) + i\cdot\sin(x)) + e^{y}(\cos(-x) + i\cdot\sin(-x)))}$$
$$= \frac{(e^{-y}\cos(x) - e^{y}\cos(-x)) + i(e^{-y}\sin(x) - e^{y}\sin(-x))}{-(e^{-y}\sin(x) + e^{y}\sin(-x)) + i(e^{-y}\cos(x) + e^{y}\cos(-x))}$$
$$= \frac{(e^{-y} - e^{y})\cos(x) + i\cdot(e^{-y} + e^{y})\sin(x)}{-(e^{-y} - e^{y})\sin(x) + i\cdot(e^{-y} + e^{y})\cos(x)}$$
$$= \frac{[(e^{-y} - e^{y})\cos(x) + i\cdot(e^{-y} + e^{y})\sin(x)]\cdot[-(e^{-y} - e^{y})\sin(x) - i\cdot(e^{-y} + e^{y})\cos(x)]}{[-(e^{-y} - e^{y})\sin(x) + i\cdot(e^{-y} + e^{y})\cos(x)]\cdot[-(e^{-y} - e^{y})\sin(x) - i\cdot(e^{-y} + e^{y})\cos(x)]}$$
$$= \frac{((e^{-y} + e^{y})^2 - (e^{-y} - e^{y})^2)\sin(x)\cos(x)}{(e^{-y} - e^{y})^2\sin(x)^2 + (e^{-y} - e^{y})^2\cos(x)^2} + i\cdot\frac{-(e^{-y} + e^{y})(e^{-y} - e^{y})(\sin(x)^2 + \cos(x)^2)}{(e^{-y} - e^{y})^2\sin(x)^2 + (e^{-y} - e^{y})^2\cos(x)^2}$$
$$= \frac{4\sin(x)\cos(x)}{(e^{-2y} + e^{2y})(\sin(x)^2 + \cos(x)^2) - 2(\sin(x)^2 - \cos(x)^2)}$$
$$+ i\cdot\frac{(e^{2y} - e^{-2y})(\sin(x)^2 + \cos(x)^2)}{(e^{-2y} + e^{2y})(\sin(x)^2 + \cos(x)^2) - 2(\sin(x)^2 - \cos(x)^2)}$$
$$= \frac{4\sin(x)\cos(x)}{(e^{-2y} + e^{2y}) - (4\sin(x)^2 - 2)} + i\cdot\frac{e^{2y} - e^{-2y}}{(e^{-2y} + e^{2y}) - (4\sin(x)^2 - 2)}$$
$$= \frac{\sin(2x)}{\cos(2x) + \cosh(2y)} + i\cdot\frac{\sinh(2y)}{\cos(2x) + \cosh(2y)}$$

Der Nachweis zur Realteil- und Imaginärteilzerlegung der Funktion $f(z) = \tan z$ kann ebenso und wesentlich kürzer mittels geeigneter Additionstheoreme gezeigt werden. Also lässt sich f in Real- und Imaginärteil zerlegen $f(x + iy) = u(x, y) + i\cdot v(x, y)$ mit

$$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } u(x,y) := \frac{4\sin(x)\cos(x)}{(e^{-2y} + e^{2y}) - (4\sin(x)^2 - 2)} = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x) + \cosh(2y)}$$
$$v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } v(x,y) := \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{(e^{-2y} + e^{2y}) - (4\sin(x)^2 - 2)} = \frac{\sinh(2y)}{\cos(2x) + \cosh(2y)}$$

Wir sehen, dass die Funktionen u und v überall in D total differenzierbar sind (d.h. reell differenzierbar in D) und zudem sind in jedem Punkt $(x, y) \in D$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt (dazu: Quotientenregel, Produktregel)

$$\begin{aligned}
\partial_x u(x,y) &= \frac{[\partial_x(4\sin(x)\cos(x))]\cdot[(e^{-2y}+e^{2y})-(4\sin(x)^2-2)]}{[(e^{-2y}+e^{2y})-(4\sin(x)^2-2)]^2} \\
&- \frac{[4\sin(x)\cos(x)]\cdot[\partial_x((e^{-2y}+e^{2y})-(4\sin(x)^2-2))]}{[(e^{-2y}+e^{2y})-(4\sin(x)^2-2)]^2} \\
&= \frac{4(1-2\sin(x)^2)\cdot[(e^{-2y}+e^{2y})-(4\sin(x)^2-2)]+32\sin(x)^2\cos(x)^2}{[(e^{-2y}+e^{2y})-(4\sin(x)^2-2)]^2} \\
&= \frac{8+(e^{2y}+e^{-2y})(4-8\sin(x)^2)}{[(e^{-2y}+e^{2y})-(4\sin(x)^2-2)]^2} \\
&= \frac{2(e^{2y}+e^{-2y})\cdot[(e^{-2y}+e^{2y})-(4\sin(x)^2-2)]-2(e^{2y}-e^{-2y})^2}{[(e^{-2y}+e^{2y})-(4\sin(x)^2-2)]^2} \\
&= \frac{[\partial_y(e^{2y}-e^{-2y})]\cdot[(e^{-2y}+e^{2y})-(4\sin(x)^2-2)]}{[(e^{-2y}+e^{2y})-(4\sin(x)^2-2)]^2} \\
&- \frac{[e^{2y}-e^{-2y}]\cdot[\partial_y((e^{-2y}+e^{2y})-(4\sin(x)^2-2))]}{[(e^{-2y}+e^{2y})-(4\sin(x)^2-2)]^2} \\
&= \partial_y v(x,y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_y u(x,y) &= \frac{[\partial_y(4\sin(x)\cos(x))]\cdot[(e^{-2y}+e^{2y})-(4\sin(x)^2-2)]}{[(e^{-2y}+e^{2y})-(4\sin(x)^2-2)]^2} \\
&- \frac{[4\sin(x)\cos(x)]\cdot[\partial_y((e^{-2y}+e^{2y})-(4\sin(x)^2-2))]}{[(e^{-2y}+e^{2y})-(4\sin(x)^2-2)]^2} \\
&= -\frac{4\sin(x)\cos(x)\cdot(2e^{2y}-2e^{-2y})}{[(e^{-2y}+e^{2y})-(4\sin(x)^2-2)]^2} \\
&= \frac{[-8\sin(x)\cos(x)]\cdot(e^{2y}-e^{-2y})}{[(e^{-2y}+e^{2y})-(4\sin(x)^2-2)]^2} \\
&= -\frac{[\partial_x(e^{2y}-e^{-2y})]\cdot[(e^{-2y}+e^{2y})-(4\sin(x)^2-2)]}{[(e^{-2y}+e^{2y})-(4\sin(x)^2-2)]^2} \\
&+ \frac{[e^{2y}-e^{-2y}]\cdot[\partial_x((e^{-2y}+e^{2y})-(4\sin(x)^2-2))]}{[(e^{-2y}+e^{2y})-(4\sin(x)^2-2)]^2} \\
&= -\partial_x v(x,y)
\end{aligned}$$

Damit ist die Funktion $f(z) = \tan z$ auf ganz $D = \mathbb{C}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (d.h. für jedes $z \in D$) komplex differenzierbar.

Aufgabe 10

Untersuche die folgenden Funktionen auf Differenzierbarkeit und komplexe Differenzierbarkeit

(a): $f(z) = z\overline{z}$

(b): $f(z) = \operatorname{Re} z$

(c): $f(z) = e^{-\frac{1}{|z|}}$ in $0 < |z| < 1$

Lösung:

zu (a): $f(z) = z\overline{z}$

Nachweis von (2): Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ist

$$f(z) = z\overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$$

Also lässt sich f in Real- und Imaginärteil zerlegen $f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ mit

$$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } u(x,y) := x^2 + y^2$$
$$v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } v(x,y) := 0$$

Wir sehen, dass die Funktionen u und v überall total differenzierbar sind (d.h. reell differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$) (da u und v partiell differenzierbar und ihre Ableitungen stetig sind) und es gilt

$$\partial_x u(x,y) = 2x \stackrel{!}{=} 0 = \partial_y v(x,y)$$
$$\partial_y u(x,y) = 2y \stackrel{!}{=} 0 = -\partial_x v(x,y)$$

Damit sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen nur im Punkt $(x,y) = (0,0)$ erfüllt und somit ist die Funktion $f(z) = z\overline{z}$ nur in $z = 0$ komplex differenzierbar.
Nachweis von (4): Für $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ gilt:

$$f(z) = z\overline{z} = re^{i\varphi}re^{-i\varphi} = r^2 e^{i\varphi - i\varphi} = r^2$$

Also lässt sich f in Real- und Imaginärteil zerlegen $f(re^{i\varphi}) = u(r,\varphi) + i \cdot v(r,\varphi)$ mit

$$u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } u(r,\varphi) := r^2$$
$$v : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } v(r,\varphi) := 0$$

Wir sehen auch hier wieder, dass die Funktionen u und v überall total differenzierbar sind (d.h. reell differenzierbar) und es gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial r}(z) = 2r \stackrel{!}{=} 0 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}(z)$$
$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}(z) = 0 \stackrel{!}{=} 0 = -r \cdot \frac{\partial v}{\partial r}(z)$$

Damit sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen nur für $r = 0$, also ausschließlich im Punkt $z = 0$, erfüllt und somit ist die Funktion $f(z) = z\overline{z}$ nur in $z = 0$ komplex differenzierbar.
Nachweis von (6): Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen $f(z) = z\overline{z} = x^2 + y^2$:

$$f_x(z) = f_x(x+iy) = 2x = 2\mathrm{Re}(z)$$
$$f_y(z) = f_y(x+iy) = 2y = 2\mathrm{Im}(z)$$

Damit verschwindet die Wirtinger Ableitung nur im Punkt $z = (x,y) = 0$, denn:

$$f_{\overline{z}}(z) = \frac{1}{2}\left(f_x(z) + if_y(z)\right) = \frac{1}{2}\left(2x + i2y\right) = 0$$

Damit ist die Funktion $f(z) = z\overline{z}$ nur in $z = 0$ komplex differenzierbar.
<u>zu (b):</u> $f(z) = \mathrm{Re}\, z$
Nachweis von (2): Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ist

$$f(z) = \mathrm{Re}\, z = x$$

Also lässt sich f in Real- und Imaginärteil zerlegen $f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ mit

$$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } u(x,y) := x$$
$$v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } v(x,y) := 0$$

Wir sehen, dass die Funktionen u und v überall total differenzierbar sind (d.h. reell differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$) und es gilt

$$\partial_x u(x,y) = 1 \stackrel{!}{=} 0 = \partial_y v(x,y)$$
$$\partial_y u(x,y) = 0 \stackrel{!}{=} 0 = -\partial_x v(x,y)$$

Damit sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen immer (d.h. in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) verletzt. Folglich ist f nirgends komplex differenzierbar.

zu (c): $f(z) = e^{-\frac{1}{|z|}}$ (in $0 < |z| < 1$) **Nachweis von (2):** Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $0 < |z| < 1$ ist

$$f(z) = e^{-\frac{1}{|z|}} = e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

Also lässt sich f in Real- und Imaginärteil zerlegen $f(x + iy) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ mit

$$\begin{aligned} u &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } u(x,y) := e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}} \\ v &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } v(x,y) := 0 \end{aligned}$$

Wir berechnen mithilfe der Kettenregel die Ableitungen von u bezüglich x bzw. y

$$\begin{aligned} \partial_x u(x,y) &= \partial_x \left(e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}} \right) = e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}} \cdot \partial_x \left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}} (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} x \\ \partial_y u(x,y) &= \partial_y \left(e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}} \right) = e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}} \cdot \partial_y \left(-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}} (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} y \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Funktionen u und v überall in $0 < |z| < 1$ (d.h. für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $0 < \sqrt{x^2+y^2} < 1$) total differenzierbar sind (d.h. reell differenzierbar für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $0 < \sqrt{x^2+y^2} < 1$) (da u und v partiell differenzierbar und ihre Ableitungen stetig sind) und es gilt

$$\begin{aligned} \partial_x u(x,y) &= e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}} (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} x \overset{!}{=} 0 = \partial_y v(x,y) \\ \partial_y u(x,y) &= e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}} (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} y \overset{!}{=} 0 = -\partial_x v(x,y) \end{aligned}$$

Da die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für $0 < |z| < 1$ nicht erfüllt sind (sondern nur für $z = 0$), ist f im Bereich $0 < |z| < 1$ nicht komplex differenzierbar.

Aufgabe 11

(a): $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und reellwertig (d.h. $f(z) \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{C}$). Zeige, dass f konstant ist.
(b): Betrachte die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen am Punkt $z = 0$ für die Funktion

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } z = 0 \\ |z|^{-2} \cdot \operatorname{Im}(z^2) & \text{, falls } z \neq 0 \end{cases}$$

Ist die Funktion komplex differenzierbar in $z = 0$?

Lösung:

zu (a): Sei $f = u + iv$, wobei

$$\begin{aligned} u &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } (x,y) \longmapsto u(x,y) \\ v &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } (x,y) \longmapsto v(x,y) \overset{f \text{ reellwertig}}{=} 0 \end{aligned}$$

Da f holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist, gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_x u(x,y) &= \partial_y v(x,y) \overset{!}{=} 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \partial_y u(x,y) &= -\partial_x v(x,y) \overset{!}{=} 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Damit gilt $\partial_x u \equiv 0$ und $\partial_y u \equiv 0$ und somit ist u konstant auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Da $f = u + iv$ und $v \equiv 0$ (da f reellwertig), ist auch f konstant auf $\mathbb{C}$.

zu (b): Mit der Darstellung $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$|z|^{-2} \cdot \operatorname{Im}(z^2) = \frac{\operatorname{Im}(z^2)}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\operatorname{Im}(x^2 - y^2 + i \cdot 2xy)}{x^2+y^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

Wir können f somit als eine Funktion im $\mathbb{R}^2$ auffassen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } f(x,y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Als nächstes zerlegen wir $f(x,y)$ in die Realteilfunktion $u(x,y)$ und in die Imaginärteilfunktion $v(x,y)$. Sei $f = u + iv$, dann gilt

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } u(x,y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } v(x,y) := 0$$

Die Funktionen u und v sind in ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar. Wir überprüfen als nächstes die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen im Punkt $(0,0)$. Diese sind erfüllt, denn zum einen gilt $\partial_x u(0,0) = \partial_y v(0,0)$

$$\partial_x u(0,0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\frac{0}{x^2}-0}{x-0} = 0$$

$$\partial_y v(0,0) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{v(0,y)-v(0,0)}{y-0} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{0-0}{y-0} = 0$$

und zum anderen gilt $\partial_y u(0,0) = -\partial_x v(0,0)$

$$\partial_y u(0,0) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{u(0,y)-u(0,0)}{y-0} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{\frac{0}{y^2}-0}{y-0} = 0$$

$$\partial_x v(0,0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{v(x,0)-v(0,0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{0-0}{y-0} = 0$$

Es bleibt zu untersuchen, ob f im Ursprung komplex differenzierbar ist. (Zur Erinnerung: $f = u + iv$ ist in $(0,0)$ genau dann komplex differenzierbar, wenn die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen im Punkt $(0,0)$ erfüllt sind und f im Punkt $(0,0)$ total differenzierbar ist.) Zunächst stellen wir fest, dass u im Punkt $(0,0)$ nicht einmal stetig ist:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} u(x,x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{2x^2}{2x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} 1 = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} u(x,0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{0}{x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} 0 = 0$$

(Zur Erinnerung: Total differenzierbare Funktionen sind stetig.) Da u im Punkt $(0,0)$ nicht stetig ist, ist auch f im Punkt $(0,0)$ nicht stetig, folglich ist f dort nicht total differenzierbar und damit auch nicht komplex differenzierbar (holomorph) im Punkt $(0,0)$.

Aufgabe 12

Es seien $f = g + ih$ holomorph und zweimal (total) differenzierbar. Zeige, dass g und h reelle harmonische Funktionen sind, d.h.

$$\triangle g = \triangle h = 0, \text{ wobei } \triangle := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Hinweis: Untersuche unter welchen Bedingungen $ax^2 + bxy + cy^2$ Realteil eines holomorphen Polynoms ist.

Lösung:

Da f holomorph ist, gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\partial_x g = \partial_y h$$
$$\partial_y g = -\partial_x h$$

Da f zweimal (total) differenzierbar ist, gilt weiter

$$\partial_x \partial_x g = \partial_x \partial_y h$$
$$\partial_y \partial_y g = -\partial_y \partial_x h$$

Auf diese Weise erhalten wir für $\triangle g$ aus dem Satz von Schwarz

$$\triangle g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)}_{\overset{\text{C.R.D.}}{=} \frac{\partial h}{\partial y}} + \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)}_{\overset{\text{C.R.D.}}{=} -\frac{\partial h}{\partial x}} = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 0$$

Analog gilt dies nach dem Satz von Schwarz auch für $\triangle h$

$$\triangle h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)}_{\overset{\text{C.R.D.}}{=} -\frac{\partial g}{\partial y}} + \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)}_{\overset{\text{C.R.D.}}{=} \frac{\partial g}{\partial x}} = -\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 0$$

Damit gilt $\triangle g = \triangle h = 0$.