Aufgabe 13

Es seien r_1 und r_2 ($r_1, r_2 \in [0, +\infty]$) die Konvergenzradien von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Zeige:

(a): falls $|a_n| \leqslant |b_n| \ \forall n \in \mathbb{N}$, dann ist $r_1 \geqslant r_2$

(b): der Konvergenzradius von $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$ ist größer oder gleich $\min\{r_1, r_2\}$

(c): der Konvergenzradius von $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n b_n)\, z^n$ ist größer oder gleich $r_1 r_2$

Lösung:

zu (a):

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant |a_n| \leqslant |b_n| \ \forall n \in \mathbb{N}\\
\Longrightarrow\ &0 \leqslant \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \sqrt[n]{|b_n|} \ \forall n \in \mathbb{N}\\
\Longrightarrow\ &0 \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}\\
\Longrightarrow\ &\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \geqslant \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}} \geqslant 0
\end{aligned}$$

Nun besagt Cauchy-Hadamard für die Konvergenzradien r_1 und r_2:

$$r_1 = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \text{ und } r_2 = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}}$$

wobei wir uns für die Spezialfälle $\limsup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ (bzw. $\limsup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$) dann $r_1 = \frac{1}{\infty} := 0$ (bzw. $r_1 = \frac{1}{0} := \infty$) definieren. Zusammen mit der ersten Zeile erhalten wir

$$r_1 = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \geqslant \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}} = r_2 \geqslant 0$$

zu (b):

Da r_1 (bzw. r_2) der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$) ist, wissen wir, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$) für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < r_1$ (bzw. $|z| < r_2$) absolut konvergiert. Erinnerung:

1. Das Cauchy-Produkt zweier absolut konvergenter Reihen ist absolut konvergent.
2. Konvergiert eine Potenzreihe für alle z mit $|z| < r$ absolut, so ist der Konvergenzradius $\geqslant r$.

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \min\{r_1, r_2\}$ beliebig. Dann konvergieren nach Voraussetzung sowohl die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ als auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ absolut. Somit konvergiert nach 1. das Cauchy-Produkt dieser Potenzreihen absolut, d.h. für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \min\{r_1, r_2\}$ (Cauchyscher Multiplikationssatz). Aus 2. folgt für den Konvergenzradius r des Cauchy-Produkts nun direkt $r \geqslant \min\{r_1, r_2\}$.

zu (c):

Es gilt

$$\begin{aligned}
&\sqrt[n]{|a_n b_n|} = \sqrt[n]{|a_n| \cdot |b_n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{|b_n|}\\
\Longrightarrow\ &\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n b_n|} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}\\
\Longrightarrow\ &\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n b_n|}} \geqslant \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \cdot \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir erneut mit Cauchy-Hadamard:

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n b_n|}} \geqslant \left(\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}}\right) = r_1 r_2$$

Aufgabe 14

Falls die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ reell auf dem Intervall $]-\delta,\delta[$ (mit $\delta > 0$) ist, dann sind alle a_n reell.
Man bestimme die Konvergenzradien von

$$\text{(a): } \sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n$$

$$\text{(b): } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$$

Lösung:

Erinnerung:

Identitätssatz für Potenzreihen: Wenn die beiden Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

in einer Umgebung von $z = 0$ konvergieren und dort dieselbe Funktion darstellen, so gilt $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Wir zeigen zunächst den ersten Teil:

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, z \in]-\delta,\delta[: \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad a_n \in \mathbb{R}\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$$

Dazu sei $a_n = b_n + ic_n$ mit $b_n, c_n \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Für $x \in]-\delta,\delta[$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + i \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Nach Voraussetzung ist die linke Seite der Gleichung reellwertig, somit gilt mit $d_n = 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \quad \forall\, x \in]-\delta,\delta[$$

Aus dem Identitätssatz für Potenzreihen folgt daher $c_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Für $x \in]-\delta,\delta[$ haben wir daher

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Wenden wir darauf den Identitätssatz für Potenzreihen ein weiteres Mal an, so erhalten wir $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und wegen $b_n \in \mathbb{R}$ folgt $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

zu (a):

Wir setzen $a_n := n^k$ für $k \in \mathbb{Z}$. Es bezeichne r den Konvergenzradius der Potenzreihe. Da Cauchy-Hadamard für dieses spezielle Beispiel schwierig anzuwenden ist, berechnen wir den Konvergenzradius mit Hilfe der Quotientenformel. Dabei sind wir vorsichtig und unterscheiden sorgfältig die drei möglichen Fälle:

1. Fall: $(k = 0)$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{1} \right| = 1$$

2. Fall: $(k > 0)$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^k}{(n+1)^k} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right|^k = 1^k = 1$$

3. Fall: $(k<0)$

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^k}{(n+1)^k}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|^k=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|^{-k}=\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{1}{n}\right|^{-k}=1^{-k}=1$$

zu (b):

Wir setzen $a_n:=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$. Es gilt überings $0!:=1$ (wegen leerem Produkt), womit jedes Folgenglied $a_n\neq 0$ $\forall\, n\in\mathbb{N}_0$ ist. Es bezeichne r wie gewohnt den Konvergenzradius. Da Cauchy-Hadamard für dieses spezielle Beispiel schwierig anzuwenden ist, berechnen wir den Konvergenzradius mit Hilfe der Quotientenformel. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}r&=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!\cdot((n+1)!)^2}{(2n+2)!\cdot(n!)^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!\cdot(n+1)^2\cdot(n!)^2}{(2n)!\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2(2n+1)(n+1)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{2}{n}}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Aufgabe 15

Man stelle die Funktionen

(a): $\cos^n(z)$
(b): $\sin^n(z)$

als Linearkombination der Funktionen $\cos(kz)$ *und* $\sin(kz)$ *mit* $k=0,\dots,n$ *dar.*

Lösung:

Die Lösungen folgen direkt aus dem binomischen Lehrsatz und einigen Additionstheoremen.

zu (a): $\cos^n(z)$

$$\begin{aligned}\cos^n(z)&=(\cos(z))^n=\left(\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)\right)^n=\frac{1}{2^n}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)^n\\&=\frac{1}{2^n}\left[\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)^n+\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)^n\right]\\&=\frac{1}{2^n}\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\underbrace{\left(e^{iz}\right)^{n-k}\left(e^{-iz}\right)^k}_{=e^{iz(n-2k)}}\right)+\left(\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\underbrace{\left(e^{-iz}\right)^{n-k}\left(e^{iz}\right)^k}_{=e^{-iz(n-2k)}}\right)\right]\\&=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\underbrace{\frac{1}{2}\left[e^{iz(n-2k)}+e^{-iz(n-2k)}\right]}_{=\cos((n-2k)z)}=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\cos((n-2k)z)\\&=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\left[\cos(nz)\cos(2kz)+\sin(nz)\sin(2kz)\right]\\&=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\left[\cos(nz)\cos^2(kz)+2\sin(nz)\sin(kz)\cos(kz)-\cos(nz)\sin^2(kz)\right]\end{aligned}$$

zu (b): $\sin^n(z)$

$$\begin{aligned}\sin^n(z)&=(\sin(z))^n=\left(\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)\right)^n=\frac{1}{(2i)^n}\left(e^{iz}+\left(-e^{-iz}\right)\right)^n\\&=\frac{1}{(2i)^n}\left[\frac{1}{2}\left(e^{iz}+\left(-e^{-iz}\right)\right)^n+\frac{1}{2}\left(e^{iz}+\left(-e^{-iz}\right)\right)^n\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(2i)^n}\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{\left(e^{iz}\right)^{n-k}\left(-e^{-iz}\right)^{k}}_{=(-1)^k e^{iz(n-2k)}}\right)+\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{\left(-e^{-iz}\right)^{n-k}\left(e^{iz}\right)^{k}}_{=(-1)^{n-k}e^{-iz(n-2k)}}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{1}{2}\left[e^{iz(n-2k)}+(-1)^{n-2k}e^{-iz(n-2k)}\right]$$

1. Fall: (n gerade) In diesem Fall gilt $(-1)^{n-2k}=1\ \forall\, k\in\mathbb{N}$ und es folgt

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\cos((n-2k)z)\\
&=\frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left[\cos(nz)\cos(2kz)+\sin(nz)\sin(2kz)\right]\\
&=\frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left[\cos(nz)\cos^2(kz)+2\sin(nz)\sin(kz)\cos(kz)-\cos(nz)\sin^2(kz)\right]
\end{aligned}$$

2. Fall: (n ungerade) In diesem Fall gilt $(-1)^{n-2k}=-1\ \forall\, k\in\mathbb{N}$ und es folgt

$$\begin{aligned}
&=\frac{i}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sin((n-2k)z)\\
&=\frac{i}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left[\sin(nz)\cos(2kz)-\cos(nz)\sin(2kz)\right]\\
&=\frac{i}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left[\sin(nz)\cos^2(kz)-2\cos(nz)\sin(kz)\cos(kz)-\sin(nz)\sin^2(kz)\right]
\end{aligned}$$

Aufgabe 16

Mit Hilfe der Eulerschen Formel leite man her

$$2\sum_{k=0}^{n}\cos(kz)=1+\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}\qquad\forall\, n\in\mathbb{N}\ \forall\, z\in\mathbb{C}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$$

Lösung:

1. Möglichkeit: (direkter Nachweis)
Mit Hilfe der geometrischen Summe (4. Gleichung), einer Indexverschiebung (8. Gleichung) und der Umkehrung der Summationsreihenfolgt (8. Gleichung) erhalten wir

$$\begin{aligned}
1+\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)} &= 1+\frac{\frac{1}{2i}\left(e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z}-e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)z}\right)}{\frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{z}{2}}-e^{-i\frac{z}{2}}\right)} = 1+\left(\frac{e^{i(n+1)z}-e^{-inz}}{e^{iz}-1}\right)\cdot\underbrace{\left(\frac{e^{-i\frac{z}{2}}}{e^{-i\frac{z}{2}}}\right)}_{=1}\\
&= 1+e^{-inz}\cdot\left(\frac{\left(e^{iz}\right)^{2n+1}-1}{e^{iz}-1}\right) = 1+e^{-inz}\cdot\sum_{k=0}^{2n}\left(e^{iz}\right)^k\\
&= 1+e^{-inz}\cdot\sum_{k=0}^{2n}e^{ikz} = 1+\sum_{k=0}^{2n}e^{i(k-n)z} = 1+\sum_{k=n+1}^{2n}e^{i(k-n)z}+\sum_{k=0}^{n}e^{i(k-n)z}\\
&= \underbrace{1}_{=e^0}+\sum_{k=1}^{n}e^{ikz}+\sum_{k=0}^{n}e^{-ikz} = \sum_{k=0}^{n}e^{ikz}+e^{-ikz} = 2\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\left(e^{ikz}+e^{-ikz}\right)\\
&= 2\cdot\sum_{k=0}^{n}\cos(kz)\qquad\forall\, n\in\mathbb{N}\ \forall\, z\in\mathbb{C}\backslash 2\pi\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

2. Möglichkeit: (Induktionsbeweis)
Induktionsvoraussetzung (IV): Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$2\sum_{k=0}^{n}\cos(kz) = 1 + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$$

Induktionsanfang (IA): $n = 0$

$$2\underbrace{\sum_{k=0}^{0}\cos(kz)}_{:=1\text{ (leere Summe)}} = 2\cdot 1 = 2 = 1 + \frac{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$$

Induktionsschluss (IS): $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=0}^{n+1}\cos(kz) &= 2\left[\sum_{k=0}^{n}\cos(kz)\right] + 2\cos((n+1)z) \overset{\text{(IV)}}{=} 1 + \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)} + 2\cos((n+1)z) \\
&= 1 + \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)z}}{e^{i\frac{z}{2}} - e^{-i\frac{z}{2}}} + e^{i(n+1)z} - e^{-i(n+1)z} \\
&= 1 + \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)z}}{e^{i\frac{z}{2}} - e^{-i\frac{z}{2}}} + \frac{\left(e^{i(n+1)z} + e^{-i(n+1)z}\right)\left(e^{i\frac{z}{2}} - e^{-i\frac{z}{2}}\right)}{e^{i\frac{z}{2}} - e^{-i\frac{z}{2}}} \\
&= 1 + \frac{e^{i\left(n+\frac{3}{2}\right)z} - e^{-i\left(n+\frac{3}{2}\right)z}}{e^{i\frac{z}{2}} - e^{-i\frac{z}{2}}} = 1 + \frac{\sin\left(\left((n+1)+\frac{1}{2}\right)z\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\backslash 2\pi\mathbb{Z}
\end{aligned}$$