Aufgabe 17

Man bestimme die Abbildungen von S^2 auf sich, die unter der stereographischen Projektion

(a): der Multiplikation mit e^{it} $(t \in \mathbb{R})$

(b): der Inversenbildung

(c): dem Übergang zum Konjugierten

entsprechen.

Lösung:

Vorbemerkung: Es ist

$$S^2 := \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\} \cong \{(z,t) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R} \mid |z|^2+t^2=1\}$$

die *Sphäre* (bzw. *Oberfläche*) *der Einheitskugel* im $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C}\times\mathbb{R}$. Betrachte das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f} & \overline{\mathbb{C}} \\ \pi\uparrow & & \uparrow\pi \downarrow \pi^{-1} \\ S^2 & \xrightarrow{\alpha} & S^2 \end{array}$$

Hierbei ist $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ eine gegebenen Funktion,

$$\pi : S^2 \to \overline{\mathbb{C}} \text{ mit } \pi(x_1,x_2,x_3) := \begin{cases} \frac{x_1+i\cdot x_2}{1-x_3} & ,\ (x_1,x_2,x_3) \neq (0,0,1) \\ \infty & ,\ (x_1,x_2,x_3) = (0,0,1) \end{cases}$$

$$\pi(z,t) := \begin{cases} \frac{z}{1-t} & ,\ (z,t) \neq (0,1) \\ \infty & ,\ (z,t) = (0,1) \end{cases}$$

die *stereographische Projektion* und $\alpha : S^2 \to S^2$ gesucht. Beachte, dass die stereographische Projektion π bijektiv ist. Die Umkehrfunktion π^{-1} ist für $z = x+iy \in \overline{\mathbb{C}}$ gegeben durch

$$\pi^{-1} : \overline{\mathbb{C}} \to S^2 \text{ mit } \pi^{-1}(z) := \begin{cases} \left(\frac{2z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) & ,\ z \neq \infty \\ (0,1) & ,\ z = \infty \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right) & ,\ (x,y) \neq \infty \\ (0,0,1) & ,\ (x,y) = \infty \end{cases}$$

Da die Umkehrfunktion π^{-1} existiert, erhalten wir α in allen Aufgabenteilen durch Hintereinanderausführung

$$\alpha(x_1,x_2,x_3) = \pi^{-1}(f(\pi(x_1,x_2,x_3))) \quad \forall\,(x_1,x_2,x_3) \in S^2$$

zu (a): (Multiplikation mit e^{it}, $t \in \mathbb{R}$)
Es ist (mit $z = x+iy \in \overline{\mathbb{C}}$)

$$f(z) = z \cdot e^{it} = (x+iy)\cdot(\cos(t)+i\sin(t)) = x\cos(t) - y\sin(t) + i(x\sin(t)+y\cos(t))$$

Dann gilt unter Berücksichtigung von $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$:

$$1)\ \pi(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1}{1-x_3} + i\cdot\frac{x_2}{1-x_3}$$

$$2)\ f\left(\frac{x_1}{1-x_3} + i\cdot\frac{x_2}{1-x_3}\right) = \frac{x_1\cos(t)-x_2\sin(t)}{1-x_3} + i\cdot\frac{x_1\sin(t)+x_2\cos(t)}{1-x_3}$$

$$3)\ \pi^{-1}\left(\frac{x_1\cos(t)-x_2\sin(t)}{1-x_3}+i\cdot\frac{x_1\sin(t)+x_2\cos(t)}{1-x_3}\right)$$
$$=\left(\frac{2(x_1\cos(t)-x_2\sin(t))(1-x_3)}{1-2x_3+x_1^2+x_2^2+x_3^2},\frac{2(x_1\sin(t)+x_2\cos(t))(1-x_3)}{1-2x_3+x_1^2+x_2^2+x_3^2},\frac{-1+2x_3+x_1^2+x_2^2-x_3^2}{1-2x_3+x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right)$$
$$=(x_1\cos(t)-x_2\sin(t),x_1\sin(t)+x_2\cos(t),x_3)=\begin{pmatrix}\cos(t)&-\sin(t)&0\\\sin(t)&\cos(t)&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Und wegen $\alpha(x_1,x_2,x_3)=\pi^{-1}(f(\pi(x_1,x_2,x_3)))$ erhalten wir

$$\alpha(x_1,x_2,x_3)=(x_1\cos(t)-x_2\sin(t),x_1\sin(t)+x_2\cos(t),x_3)=\begin{pmatrix}\cos(t)&-\sin(t)&0\\\sin(t)&\cos(t)&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

zu (b): (Inversenbildung)
Es ist (mit $z=x+iy\in\overline{\mathbb{C}}$)

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}$$

Dann gilt unter Berücksichtigung von $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$:

$$1)\ \pi(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_1}{1-x_3}+i\cdot\frac{x_2}{1-x_3}$$
$$2)\ f\left(\frac{x_1}{1-x_3}+i\cdot\frac{x_2}{1-x_3}\right)=\frac{(1-x_3)x_1}{x_1^2+x_2^2}+i\cdot\frac{-(1-x_3)x_2}{x_1^2+x_2^2}$$
$$3)\ \pi^{-1}\left(\frac{(1-x_3)x_1}{x_1^2+x_2^2}+i\cdot\frac{-(1-x_3)x_2}{x_1^2+x_2^2}\right)$$
$$=\left(\frac{2(1-x_3)x_1}{1-2x_3+x_1^2+x_2^2+x_3^2},\frac{-2(1-x_3)x_2}{1-2x_3+x_1^2+x_2^2+x_3^2},\frac{1-2x_3-x_1^2-x_2^2+x_3^2}{1-2x_3+x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right)$$
$$=(x_1,-x_2,-x_3)$$

Und wegen $\alpha(x_1,x_2,x_3)=\pi^{-1}(f(\pi(x_1,x_2,x_3)))$ erhalten wir

$$\alpha(x_1,x_2,x_3)=(x_1,-x_2,-x_3)$$

zu (c): (Übergang zum komplex Konjugierten)
Es ist (mit $z=x+iy\in\overline{\mathbb{C}}$)

$$f(z)=\overline{z}=x+i(-y)$$

Dann gilt unter Berücksichtigung von $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$:

$$1)\ \pi(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_1}{1-x_3}+i\cdot\frac{x_2}{1-x_3}$$
$$2)\ f\left(\frac{x_1}{1-x_3}+i\cdot\frac{x_2}{1-x_3}\right)=\frac{x_1}{1-x_3}+i\cdot\frac{-x_2}{1-x_3}$$
$$3)\ \pi^{-1}\left(\frac{x_1}{1-x_3}+i\cdot\frac{-x_2}{1-x_3}\right)$$
$$=\left(\frac{2(1-x_3)x_1}{1-2x_3+x_1^2+x_2^2+x_3^2},\frac{-2(1-x_3)x_2}{1-2x_3+x_1^2+x_2^2+x_3^2},\frac{-1+2x_3+x_1^2+x_2^2-x_3^2}{1-2x_3+x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right)$$
$$=(x_1,-x_2,x_3)$$

Und wegen $\alpha(x_1,x_2,x_3)=\pi^{-1}(f(\pi(x_1,x_2,x_3)))$ erhalten wir

$$\alpha(x_1,x_2,x_3)=(x_1,-x_2,x_3)$$

Aufgabe 18

Sei $T(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ mit $ad-bc \neq 0$ eine Möbiustransformation. Dann gilt:

$$T(\mathbb{R}\cup\{\infty\}) = \mathbb{R}\cup\{\infty\} \iff \exists\, \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R} \text{ mit } \alpha\delta-\beta\gamma \neq 0: \ T(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

Man zeige dann, dass alle gebrochen linearen Transformationen, die die Einheitskreislinie in sich überführen, in der Form $Sz := \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$ mit $a,b \in \mathbb{C}$ und $|a| \neq |b|$ geschrieben werden können.

Lösung:

1. Teil: Sei $T(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ und $ad-bc \neq 0$. Zu zeigen ist

$$T(\mathbb{R}\cup\{\infty\}) = \mathbb{R}\cup\{\infty\} \iff \exists\, \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R} \text{ mit } \alpha\delta-\beta\gamma \neq 0: \ T(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

$\Longleftarrow$: i) z.z.: T ist injektiv. Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$.

$$\begin{aligned} T(z_1) &= \frac{\alpha z_1+\beta}{\gamma z_1+\delta} = \frac{(\alpha z_1+\beta)(\gamma z_2+\delta)}{(\gamma z_1+\delta)(\gamma z_2+\delta)} = \frac{\alpha\gamma z_1 z_2 + \beta\gamma z_2 + \alpha\delta z_1 + \beta\delta}{\gamma^2 z_1 z_2 + \gamma\delta z_1 + \gamma\delta z_2 + \delta^2} \\ &= \frac{\alpha\gamma z_1 z_2 + \beta\gamma z_1 + \alpha\delta z_2 + \beta\delta}{\gamma^2 z_1 z_2 + \gamma\delta z_1 + \gamma\delta z_2 + \delta^2} = \frac{(\alpha z_2+\beta)(\gamma z_1+\delta)}{(\gamma z_2+\delta)(\gamma z_1+\delta)} = \frac{\alpha z_2+\beta}{\gamma z_2+\delta} = T(z_2) \end{aligned}$$
$$\iff \beta\gamma z_2 + \alpha\delta z_1 = \beta\gamma z_1 + \alpha\delta z_2$$
$$\iff (\alpha\delta-\beta\gamma)(z_1-z_2) = 0 \overset{\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0}{\iff} z_1 - z_2 = 0 \iff z_1 = z_2$$

Also ist T injektiv.
ii) z.z.: T ist surjektiv. Sei $w \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Suche $z \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ mit $T(z) = w$:

$$w = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} = T(z) \iff w(\gamma z+\delta) = \alpha z+\beta \iff (w\gamma-\alpha)z = \beta - w\delta \iff z = \frac{\beta-w\delta}{w\gamma-\alpha}$$

Damit ist das Urbild von w gerade durch $z = \frac{\beta-w\delta}{w\gamma-\alpha}$ gegeben. Es bleibt zu zeigen, dass z in $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ liegt.
iii) z.z.: Für $w \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ gilt $z := \frac{\beta-w\delta}{w\gamma-\alpha} \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Dazu müssen wir zeigen

$$z := \frac{\beta-w\delta}{w\gamma-\alpha} = \overline{\frac{\beta-w\delta}{w\gamma-\alpha}} = \bar{z}$$

Dies folgt direkt aus

$$\bar{z} = \overline{\frac{\beta-w\delta}{w\gamma-\alpha}} = \frac{\bar{\beta}-\bar{w}\bar{\delta}}{\bar{w}\bar{\gamma}-\bar{\alpha}} \overset{\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}}{=} \frac{\beta-\bar{w}\delta}{\bar{w}\gamma-\alpha} \overset{w\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}}{=} \frac{\beta-w\delta}{w\gamma-\alpha} = z$$

Damit gilt $z \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ und folglich ist T surjektiv. Insgesamt ist $T: \mathbb{R}\cup\{\infty\} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ eine bijektive Selbstabbildung von $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Beachte: Die Umkehrfunktion von T ist gegeben durch

$$T^{-1}: \mathbb{R}\cup\{\infty\} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\} \text{ mit } T^{-1}(z) := \frac{\beta-z\delta}{w\gamma-\alpha}$$

und ist selbst auch wieder eine gebrochen lineare Transformation (Möbiustransformation).
$\Longrightarrow$: Sei o.E. (ohne Einschränkung) $c \in \mathbb{R}$, falls nicht, so erweitere mit $\bar{c}$.
1. Fall: $(c = 0)$. Es gilt:

$$T(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \in \mathbb{R}\cup\{\infty\} \ \forall\, z \in \mathbb{R}\cup\{\infty\} \text{ mit } ad \neq 0 \text{ (also } a \neq 0 \text{ und } d \neq 0)$$

Setze nacheinander $z = 0$ und $z = 1$, dann gilt (wegen $T(\mathbb{R}\cup\{\infty\}) = \mathbb{R}\cup\{\infty\}$):

$$z = 0 \implies T(0) = \frac{b}{d} \in \mathbb{R}$$
$$z = 1 \implies T(1) = \frac{a}{d} + \underbrace{\frac{b}{d}}_{\in\mathbb{R}} \in \mathbb{R} \implies \frac{a}{d} \in \mathbb{R}$$

Weiter ist $\frac{c}{d} \in \mathbb{R}$ und $\frac{d}{d} \in \mathbb{R}$. Insgesamt folgt daher

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \text{ mit } \alpha := \frac{a}{d}, \beta := \frac{b}{d}, \gamma := \frac{c}{d} = 0, \delta := \frac{d}{d} = 1 \in \mathbb{R}$$

und (wegen $ad \neq 0$, also $a \neq 0$ und $d \neq 0$)

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \frac{a}{d} \cdot \frac{d}{d} - \frac{b}{d} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ad}{d^2} \neq 0$$

2. Fall: ($c \neq 0$). Sei o.B.d.A. $c = 1$, ansonsten multipliziere den Zähler und den Nenner mit $\frac{1}{c}$. Es gilt:

$$T(z) = \frac{az + b}{z + d} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \,\forall\, z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \text{ mit } ad - b \neq 0 \text{ (also } ad \neq b)$$

1. Unterfall: ($d = 0$). Es gilt:

$$T(z) = \frac{az + b}{z} = a + \frac{b}{z} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \,\forall\, z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \text{ mit } -b \neq 0 \text{ (also } b \neq 0)$$

Setze nacheinander $z = 1$ und $z = 2$, dann gilt (wegen $T(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$):

$$z = 1 \implies T(1) = a + b \in \mathbb{R}$$
$$z = 2 \implies T(2) = a + \frac{b}{2} \in \mathbb{R}$$

Damit gilt $a, b \in \mathbb{R}$. Denn seien $a = a_1 + ia_2$ und $b = b_1 + ib_2$ mit $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, dann besagt $T(1) \in \mathbb{R}$ (bzw. $T(2) \in \mathbb{R}$), dass $\operatorname{Im}(a+b) = a_2 + b_2 = 0$ (bzw. $\operatorname{Im}(a + \frac{b}{2}) = a_2 + \frac{b_2}{2} = 0$), also $a_2 = b_2 = 0$. Insgesamt folgt daher

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \text{ mit } \alpha := a, \beta := b, \gamma := 1, \delta := d = 0 \in \mathbb{R}$$

mit (wegen $-b \neq 0$)

$$\alpha\delta - \beta\gamma = ad - bc = -b \neq 0$$

2. Unterfall: ($d \neq 0$). Es gilt:

$$T(z) = \frac{az + b}{z + d} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \,\forall\, z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \text{ mit } ad - b \neq 0 \text{ (also } ad \neq b)$$

Eine Umformung von T liefert

$$T(z) = \frac{az + b}{z + d} = \frac{az + ad}{z + d} + \frac{b - ad}{z + d} = \frac{a(z + d)}{(z + d)} + \frac{b - ad}{z + d} = a + \frac{b - ad}{z + d} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \,\forall\, z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Wir zeigen nun, dass der zweite Summand in $\mathbb{R}$ liegt (beachte: $b - ad \neq 0$):

$$\frac{b - ad}{z + d} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \,\forall\, z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \iff \frac{z + d}{b - ad} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \,\forall\, z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Die Aussage auf der rechten Seite folgt nun direkt aus dem 1. Fall.

2. Teil: Sei $S^1 := \partial\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ und $S : S^1 \to S^1$ eine gebrochen lineare Transformation (Möbiustransformation). Zu zeigen ist:

$$S(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \text{ mit } a, b \in \mathbb{C} \text{ und } |a| \neq |b|$$

Erinnerung: Jede Möbiustransformation kann durch eine geeignete Komposition aus Transformationen der folgenden drei Elementartypen gebildet werden

- *Verschiebung (Translation)* um den Vektor b: $V_b : z \longmapsto z + b$

- *Inversion*: $f_z : z \longmapsto \frac{1}{z}$
- *Drehstreckung*: Mit $\mathbb{C} \ni a = |a| e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, beschreibt $D_a : z \longmapsto a \cdot z$ eine Streckung um den Faktor $|a|$ mit einer Drehung um den Winkel α

Wir zeigen, dass sich die gesuchte Transformations $S(z) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z)$ als Komposition von Transformationen der folgenden Elementartypen schreiben lässt

$$f_1(z) := z + \frac{d}{c} \text{ (Verschiebung)}$$
$$f_2(z) := \frac{1}{z} \text{ (Inversion)}$$
$$f_3(z) := \frac{a}{c} - \left(\frac{ad-bc}{c^2}\right) z \text{ (Drehstreckung)}$$

1. Für jedes $z \in S^1$ (d.h. $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$) gilt nach dem Abbilden mittels $f_1(z) = z + \frac{d}{c}$

$$\left|z - \frac{d}{c}\right| = 1$$

Die Abbildung f_1 verschiebt somit die Einheitskreislinie um 0 auf den Einheitskreis um $\frac{d}{c}$.
2. Für jedes $z \in \partial\mathbb{E} + \frac{d}{c}$ (d.h. $z \in \mathbb{C}$ mit $\left|z - \frac{d}{c}\right| = 1$) gilt nach dem Abbilden mittels $f_2(z) = \frac{1}{z} =: w$

$$w = \frac{1}{z} \iff \frac{1}{w} = z \iff \frac{1}{w} - \frac{d}{c} = z - \frac{d}{c} \iff \left|\frac{1}{w} - \frac{d}{c}\right| = \left|z - \frac{d}{c}\right| = 1$$

Daraus erhalten wir mit der Kurzschreibnotation $A := \frac{d}{c}$

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{w} - A\right| = 1 \\
\iff &|1 - Aw| = |w| \\
\iff &|1 - Aw|^2 = |w|^2 \\
\iff &(1 - \mathrm{Re}\,(Aw))^2 + (\mathrm{Im}\,(Aw))^2 = |w|^2 \\
\iff &1 - 2\mathrm{Re}\,(Aw) + |Aw|^2 = |w|^2 \\
\iff &1 - 2\mathrm{Re}\,(Aw) + |A|^2 |w|^2 = |w|^2 \\
\iff &|w|^2 \left(|A|^2 - 1\right) - 2\mathrm{Re}\,(Aw) + 1 = 0
\end{aligned}$$

Schreiben wir $w = r_w e^{i\varphi_w}$, $A := \frac{d}{c} = r_A e^{i\varphi_A}$ mit $r_w, r_A > 0$ und $\varphi_w, \varphi_A \in]-\pi, \pi]$, so gilt weiter

$$\begin{aligned}
\iff &r_w^2 \left(r_A^2 - 1\right) - 2\mathrm{Re}(Aw) + \frac{r_A^2 - 1}{r_A^2 - 1} = 0 \\
\iff &r_w^2 \left(r_A^2 - 1\right)^2 - 2\mathrm{Re}(Aw)(\left(r_A^2 - 1\right)) + r_A^2 = 1 \\
\iff &r_w^2 \left(|A|^2 - 1\right)^2 - r_A r_w e^{-i(\varphi_A + \varphi_w)}(\left(r_A^2 - 1\right)) - r_A r_w e^{i(\varphi_A + \varphi_w)}(\left(r_A^2 - 1\right)) + r_A^2 = 1 \\
\iff &\left[r_w e^{i\varphi_w} \left(|A|^2 - 1\right) - r_A e^{-i\varphi_A}\right] \cdot \left[r_w e^{-i\varphi_w} \left(|A|^2 - 1\right) - r_A e^{i\varphi_A}\right] = 1 \\
\iff &\left|r_w e^{i\varphi_w} \left(|A|^2 - 1\right) - r_A e^{-i\varphi_A}\right|^2 = 1 \\
\iff &\left|r_w e^{i\varphi_w} \left(|A|^2 - 1\right) - r_A e^{-i\varphi_A}\right| = 1 \\
\iff &\left|r_w e^{i\varphi_w} - \frac{r_A e^{-i\varphi_A}}{|A|^2 - 1}\right| = \frac{1}{\left||A|^2 - 1\right|} \\
\iff &\left|w - \frac{\overline{A}}{|A|^2 - 1}\right| = \frac{1}{\left||A|^2 - 1\right|}
\end{aligned}$$

$$\iff \left| w - \underbrace{\frac{\overline{d}\,|c|^2}{\overline{c}\left(|d|^2 - |c|^2\right)}}_{\text{Mittelpunkt}} \right| = \underbrace{\frac{|c|^2}{\left||d|^2 - |c|^2\right|}}_{\text{Radius}}$$

3. Wir betrachten nun die Abbildung $f_3(z) = \frac{a}{c} - \left(\frac{ad-bc}{c^2}\right) z$.
Mittelpunkt: Da f_3 Kreismittelpunkte auf Kreismittelpunkte abbildet und f_3 auf die Einheitskreislinie um 0 abbilden soll (d.h. das Bild des Mittelpunktes muss 0 sein) untersuchen wir das Bild des im vorherigen Schritt ermittelten Mittelpunktes $\frac{\overline{d}|c|^2}{\overline{c}(|d|^2-|c|^2)}$

$$f_3\left(\frac{\overline{d}\,|c|^2}{\overline{c}\left(|d|^2 - |c|^2\right)}\right) = \frac{a}{c} - \left(\frac{ad-bc}{c^2}\right) \cdot \frac{\overline{d}\,\overbrace{|c|^2}^{=c\overline{c}}}{\overline{c}\left(|d|^2 - |c|^2\right)} = \frac{a(|d|^2 - |c|^2) - a\,|d|^2 + bc\overline{d}}{c(|d|^2 - |c|^2)}$$

$$= \frac{-a\,\overbrace{|c|^2}^{=c\overline{c}}+bc\overline{d}}{c(|d|^2 - |c|^2)} = \frac{b\overline{d} - a\overline{c}}{|d|^2 - |c|^2} \overset{!}{=} 0$$

Daraus erhalten wir eine erste Bedingung: $\boxed{\frac{b\overline{d}-a\overline{c}}{|d|^2-|c|^2} = 0}$

Radius: Da f_3 auf die Einheitskreislinie um 0 abbilden soll, muss der Radius folglich 1 sein

$$\frac{|c|^2}{\left||d|^2 - |c|^2\right|^2} \cdot \left|\frac{ad-bc}{c^2}\right| = \frac{|ad-bc|}{\left||d|^2 - |c|^2\right|} \overset{!}{=} 1$$

Daraus erhalten wir eine zweite Bedingung: $\boxed{\frac{|ad-bc|}{\left||d|^2-|c|^2\right|} = 1}$

Aus der (bei der Berechnung des Mittelpunktes) gewonnenen Bedingung erhalten wir

$$\frac{b\overline{d} - a\overline{c}}{|d|^2 - |c|^2} = 0 \iff b\overline{d} - a\overline{c} = 0 \iff a\overline{c} = b\overline{d} \iff ad = \frac{b}{\overline{c}}\,|d|^2$$

$$\frac{b\overline{d} - a\overline{c}}{|d|^2 - |c|^2} = 0 \iff b\overline{d} - a\overline{c} = 0 \iff b\overline{d} = a\overline{c} \iff bc = \frac{a}{\overline{d}}\,|c|^2$$

Aus diesen zwei Ergebnissen, aus dem Zwischenergebnis $a\overline{c} = b\overline{d}$ und aus der (bei der Berechnung des Mittelpunktes) gewonnenen Bedingung erhalten wir

$$\frac{|ad-bc|}{\left||d|^2 - |c|^2\right|} = 1$$

$$\iff |ad - bc| = \left||d|^2 - |c|^2\right|$$

$$\iff \left|\frac{b}{\overline{c}}\,|d|^2 - \frac{a}{\overline{d}}\,|c|^2\right| = \left||d|^2 - |c|^2\right|$$

$$\iff \left|\frac{b\overline{d}}{\overline{c}\overline{d}}\,|d|^2 - \frac{a\overline{c}}{\overline{c}\overline{d}}\,|c|^2\right| = \left||d|^2 - |c|^2\right|$$

$$\iff \left|\frac{b\overline{d}}{\overline{c}\overline{d}}\,|d|^2 - \frac{b\overline{d}}{\overline{c}\overline{d}}\,|c|^2\right| = \left||d|^2 - |c|^2\right|$$

$$\iff \left|\frac{b\overline{d}}{\overline{c}\overline{d}}\right| \cdot \left||d|^2 - |c|^2\right| = \left||d|^2 - |c|^2\right|$$

$$\iff \left|\frac{b}{\overline{c}}\right| = 1$$

$$\iff |b| = |\overline{c}|$$

$$\iff b = \overline{c} \text{ oder } b = -\overline{c}$$

1. Fall: $(b = \overline{c})$. Wegen $a = \frac{b\overline{d}}{\overline{c}} = \frac{\overline{c}\overline{d}}{\overline{c}} = \overline{d}$ erhalten wir $a = \overline{d}$ und $b = \overline{c}$.
2. Fall: $(b = -\overline{c})$. Wegen $a = \frac{b\overline{d}}{\overline{c}} = \frac{-\overline{c}\overline{d}}{\overline{c}} = -\overline{d}$ erhalten wir $a = -\overline{d}$ und $b = -\overline{c}$.
Falls $S : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ nun eine lineare Transformation mit $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ und $S(\partial\mathbb{E}) = \partial\mathbb{E}$ ist, so muss S eine der beiden folgenden Darstellungen annehmen

$$S(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}} \text{ oder } S(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{-(\overline{b}z+\overline{a})}$$

Im ersten Fall setzen wir daher $\alpha := a = \overline{d}$, $\beta = b = \overline{c}$ und im zweiten Fall setzen wir $\alpha := a = -\overline{d}$, $\beta = b = -\overline{c}$. Da S nach Voraussetzung eine lineare Transformation ist, gilt im ersten Fall offenbar die Bedingung

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = \alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta} = \overline{d}d - \overline{c}c = ad - bc \neq 0$$

Analog lässt sich dies für den zweiten Fall zeigen.

Aufgabe 19

Es bewege sich z auf einem von 0 ausgehenden Halbstrahl $\arg z = \text{const.}$ ins Unendliche. Für welche Richtungen existiert der folgende Limes

(a): $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$

(b): $\lim\limits_{z\to\infty} z + e^z$

Lösung: zu (a): $\lim_{z\to\infty} e^z$
Wir betrachten die Polarform von z, d.h. $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$. Dann ist nach der Eulerschen Formel

$$e^z = e^{r\cos\varphi} \cdot e^{ir\sin\varphi} = e^{r\cos\varphi} \cdot (\cos(r\sin\varphi) + i \cdot \sin(r\sin\varphi))$$

$\lim_{z\to\infty}$ des Ausdrucks auf der linken Seite ist (da z entlang eines Halbstrahls gegen unendlich laufen soll) gleichbedeutend mit $\lim_{r\to\infty}$ des Ausdrucks auf der rechten Seite. Mit anderen Worten muss der Radius r gegen unendlich anwachsen, wohingegen das Argument φ (also der Öffnungswinkel) konstant bleibt. Dazu unterscheiden wir jetzt drei Fälle (und betrachten ausschließlich den Hauptwert des Arguments, d.h. $\varphi \in]-\pi,\pi]$):
1. Fall: $(\varphi \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)$. Es gilt $\cos\varphi > 0$, also $\lim_{r\to\infty} e^{r\cos\varphi} = \infty$. Daher folgt:

$$\lim_{z\to\infty} |e^z| = \lim_{r\to\infty} |e^{r\cos\varphi}| \cdot \underbrace{|\cos(r\sin\varphi) + i\cdot\sin(r\sin\varphi)|}_{=1} = \lim_{r\to\infty} |e^{r\cos\varphi}| = \lim_{r\to\infty} e^{r\cos\varphi} = \infty$$

2. Fall: $(\varphi = \frac{\pi}{2})$. Es gilt $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, also $\lim_{r\to\infty} e^{r\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1$. Daher folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\infty} e^z &= \lim_{r\to\infty} \underbrace{e^{r\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}}_{=1} \cdot (\cos(r \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}) + i\cdot\sin(r\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1})) \\ &= \lim_{r\to\infty} \cos(r) + i\cdot\sin(r) \text{ (Grenzwert existiert nicht!)}\end{aligned}$$

3. Fall: $(\varphi = -\frac{\pi}{2})$. Es gilt $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, also $\lim_{r\to\infty} e^{r\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1$. Daher folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\infty} e^z &= \lim_{r\to\infty} \underbrace{e^{r\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}}_{=1} \cdot (\cos(r \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=-1}) + i\cdot\sin(r\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=-1})) \\ &= \lim_{r\to\infty} \cos(-r) + i\cdot\sin(-r) \\ &= \lim_{r\to\infty} \cos(r) - i\cdot\sin(r) \text{ (Grenzwert existiert nicht!)}\end{aligned}$$

4. Fall: ($\varphi \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$). Es gilt $\cos\varphi < 0$, also $\lim_{r\to\infty} e^{r\cos\varphi} = 0$. Daher folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\infty} |e^z| &= \lim_{r\to\infty} |e^{r\cos\varphi}| \cdot \underbrace{|\cos(r\sin\varphi) + i\cdot\sin(r\sin\varphi)|}_{=1} \\ &= \lim_{r\to\infty} |e^{r\cos\varphi}| = \lim_{r\to\infty} e^{r\cos\varphi} = 0\end{aligned}$$

Damit folgt (wegen $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow |z_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$) $\lim_{z\to\infty} e^z = 0$.
Resümee: Läuft z entlang eines Halbstrahls in der rechten Halbebene gegen unendlich, so konvergiert e^z auch gegen unendlich. Läuft z entlang der imaginären Achse gegen unendlich, so existiert für e^z kein Grenzwert. Läuft z entlang eines Halbstrahls in der linken Halbebene gegen unendlich, so konvergiert e^z gegen 0.
zu (b): $\lim_{z\to\infty} z + e^z$
1. Fall: ($\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$). Es gilt $\cos\varphi > 0$. Daher folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\infty} |z+e^z| &= \lim_{r\to\infty} |r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + e^{r\cos\varphi}(\cos(r\sin\varphi) + i\sin(r\sin\varphi))| \\ &= \lim_{r\to\infty} |r\cos\varphi + e^{r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi) + i\,(r\sin\varphi + e^{r\cos\varphi}\sin(r\sin\varphi))| \\ &= \lim_{r\to\infty} \sqrt{[r\cos\varphi + e^{r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi)]^2 + [r\sin\varphi + e^{r\cos\varphi}\sin(r\sin\varphi)]^2} \\ &= \lim_{r\to\infty} \Big[r^2\cos^2\varphi + e^{2r\cos\varphi}\cos^2(r\sin\varphi) + 2r\cos\varphi e^{r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi) \\ &\qquad + r^2\sin^2\varphi + e^{2r\cos\varphi}\sin^2(r\sin\varphi) + 2r\sin\varphi e^{r\cos\varphi}\sin(r\sin\varphi)\Big]^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{r\to\infty} \Big[r^2\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} + e^{2r\cos\varphi}\underbrace{(\cos^2(r\sin\varphi) + \sin^2(r\sin\varphi))}_{=1} \\ &\qquad + 2re^{r\cos\varphi}\underbrace{(\cos\varphi\cos(r\sin\varphi) + \sin\varphi\sin(r\sin\varphi))}_{=\cos(\varphi - r\sin\varphi)}\Big]^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{r\to\infty} \sqrt{r^2 + e^{2r\cos\varphi} + 2re^{r\cos\varphi}\underbrace{\cos(\varphi - r\sin\varphi)}_{\geqslant -1}} \\ &\geqslant \lim_{r\to\infty} \sqrt{r^2 + e^{2r\cos\varphi} - 2re^{r\cos\varphi}} = \lim_{r\to\infty} \sqrt{(e^{r\cos\varphi} - r)^2} \\ &= \lim_{r\to\infty} |e^{r\cos\varphi} - r| = \lim_{r\to\infty} e^{r\cos\varphi} - r \geqslant \lim_{r\to\infty} \frac{(r\cos\varphi)^2}{2} - r = \infty\end{aligned}$$

Das verwendete Additionstheorem lautet:

$$\cos x\cos y + \sin x\sin y = \cos(x-y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

Die letzte Abschätzung lässt sich wie folgt begründen:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \implies e^{r\cos\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r\cos\varphi)^k}{k!} \geqslant \frac{(r\cos\varphi)^2}{2!} = \frac{(r\cos\varphi)^2}{2}$$

2. Fall: ($\varphi = \frac{\pi}{2}$). Es gilt $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ und $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Daher folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\infty} |z+e^z| &= \lim_{r\to\infty} \left|r\cdot\Big(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + i\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}\Big) + e^{r\cdot\overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{=0}}\cdot\Big(\cos(r\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}_{=1}) + i\cdot\sin(r\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}_{=1})\Big)\right| \\ &= \lim_{r\to\infty} |ri + \cos(r) + i\sin(r)| \\ &= \lim_{r\to\infty} |\cos(r) + i(r + \sin(r))| \\ &= \lim_{r\to\infty} \sqrt{\cos^2(r) + (r+\sin(r))^2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{r\to\infty} \sqrt{\underbrace{\cos^2(r)+\sin^2(r)}_{=1}+r^2+2r\sin(r)} \\
&= \lim_{r\to\infty} \sqrt{1+r^2+2r\underbrace{\sin(r)}_{\geqslant -1}} \\
&\geqslant \lim_{r\to\infty} \sqrt{1+r^2-2r} = \lim_{r\to\infty} \sqrt{(r-1)^2} = \lim_{r\to\infty} |r-1| \geqslant \lim_{r\to\infty} r-1 = \infty
\end{aligned}
$$

3. Fall: $(\varphi = -\frac{\pi}{2})$. Es gilt $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ und $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$. Daher folgt:

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\to\infty} |z+e^z| &= \lim_{r\to\infty} |r\cdot(\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}+i\cdot\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=-1})+e^{r\cdot\overbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}^{=0}}\cdot(\cos(r\underbrace{\sin(-\frac{\pi}{2})}_{=-1}))+i\cdot\sin(r\underbrace{\sin(-\frac{\pi}{2})}_{=-1})))| \\
&= \lim_{r\to\infty} |-ri+\underbrace{\cos(-r)}_{\cos(r)}+i\underbrace{\sin(-r)}_{=-\sin(r)}| \\
&= \lim_{r\to\infty} |\cos(r)+i(-r-\sin(r))| \\
&= \lim_{r\to\infty} \sqrt{\cos^2(r)+(-r-\sin(r))^2} \\
&= \lim_{r\to\infty} \sqrt{\underbrace{\cos^2(r)+\sin^2(r)}_{=1}+r^2+2r\sin(r)} \\
&= \lim_{r\to\infty} \sqrt{1+r^2+2r\underbrace{\sin(r)}_{\geqslant -1}} \\
&\geqslant \lim_{r\to\infty} \sqrt{1+r^2-2r} = \lim_{r\to\infty} \sqrt{(r-1)^2} = \lim_{r\to\infty} |r-1| \geqslant \lim_{r\to\infty} r-1 = \infty
\end{aligned}
$$

4. Fall: $(\varphi \in]-\pi,-\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\pi[)$. Es gilt $\cos\varphi < 0$. Daher folgt (analog zum 1. Fall):

$$
\lim_{z\to\infty} |z+e^z| = \infty
$$

Resümee: Läuft z entlang irgendeines Halbstrahls in der komplexen Halbebene gegen unendlich, so konvergiert $z+e^z$ auch gegen unendlich.

Aufgabe 20

Man zeige die Ungleichung

$$
\frac{1}{4}|z| < |e^z-1| < \frac{7}{4}|z| \quad \forall\, 0<|z|<1
$$

Lösung:

i) z.z.: $|e^z-1| < \frac{7}{4}|z|$

Aus der Darstellung der Exponentialreihe und der Dreiecksungleichung erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
|e^z-1| &= \left|\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)-1\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right| = |z|\cdot\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}\right| \\
&\leqslant |z|\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z^n|}{|(n+1)!|}\right) = |z|\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{(n+1)!}\right) \overset{|z|<1}{<} |z|\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\right) \\
&= |z|\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\right) = |z|\cdot\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\right)-1\right] = |z|\cdot(e-1) < \frac{7}{4}|z| \quad \forall\, 0<|z|<1
\end{aligned}
$$

ii) z.z.: $|e^z-1| > \frac{1}{4}|z|$

Aus der Darstellung der Exponentialreihe und der umgekehrten Dreiecksungleichung erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
|e^z - 1| &= \left| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) - 1 \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \right| = |z| \cdot \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \right| \\
&= |z| \cdot \left| 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \right| \geqslant |z| \cdot \left| 1 - \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \right| \right| \geqslant |z| \cdot \left| 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{(n+1)!} \right| \\
&\overset{|z|<1}{>} |z| \cdot \left| 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \right| = |z| \cdot \left| 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \right| = |z| \cdot \left| 1 - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \right) + 2 \right| \\
&= |z| \cdot (3 - e) > \frac{1}{4} |z| \quad \forall\, 0 < |z| < 1
\end{aligned}
$$