Aufgabe 21

Berechne unter Verwendung der Definition das Integral

$$\int_\gamma (z-z_0)^m \, dz$$

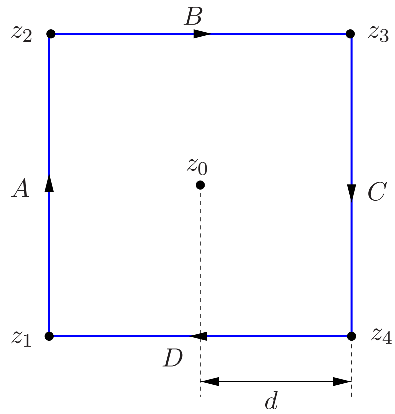
wobei $m \in \mathbb{N}$ und γ ein Quadrat mit Mittelpunkt z_0 ist, dessen Achsen parallel zu den Koordinatenachsen sind.

Lösung:

Erinnerung:

Kurvenintegral: $U \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $\alpha : [a, b] \to U$ stückweise stetig differenzierbare Kurve mit $\mathrm{Sp}(\alpha) \subset U$, dann ist das *Kurvenintegral* von f entlang der Kurve α definiert als

$$\int_\alpha f(z)\, dz = \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt$$



Wir bestimmen zunächst die Kurve γ für ein Quadrat mit den Eckpunkten z_1, z_2, z_3, z_4 zu einem bekannten Mittelpunkt z_0. Diese Kurve wird im Folgenden im Uhrzeigersinn durchlaufen. Andernfalls ändert sich das Vorzeichen aller Ergebnisse. Da die Achsen des Quadrates einerseits parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen sollen und andererseits das Quadrat eine beliebige Größe besitzen darf, betrachten wir zu einem beliebigen Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ die Eckpunkte

$$\begin{aligned}
z_1 &= (x_0 - d) + i(y_0 - d)\\
z_2 &= (x_0 - d) + i(y_0 + d)\\
z_3 &= (x_0 + d) + i(y_0 + d)\\
z_4 &= (x_0 + d) + i(y_0 - d)
\end{aligned}$$

wobei $d \in \mathbb{R}_+^*$ beliebig. Der Wert d reguliert hierbei die Größe des Quadrates und entspricht der Hälfte einer Seitenlänge. Man überlege sich leicht, dass alle auf diese Art konstruierten möglichen Quadrate den Punkt z_0 als Mittelpunkt aufweisen. Als nächstes notieren wir die vier Kurven A, B, C, D für die vier verschiedenen Teilstrecken (Verbindungsstrecken):

$$\begin{aligned}
A &:= [z_1, z_2] : [0, 1] \to \mathbb{C} \text{ mit } A(t) := z_1 + t(z_2 - z_1) = x_0 - d + i(y_0 + (2t - 1)d)\\
B &:= [z_2, z_3] : [1, 2] \to \mathbb{C} \text{ mit } B(t) := z_2 + (t - 1)(z_3 - z_2) = (-3 + 2t)d + x_0 + i(y_0 + d)\\
C &:= [z_3, z_4] : [2, 3] \to \mathbb{C} \text{ mit } C(t) := z_3 + (t - 2)(z_4 - z_3) = x_0 + d + i(y_0 + (-2t + 5)d)\\
D &:= [z_4, z_1] : [3, 4] \to \mathbb{C} \text{ mit } D(t) := z_4 + (t - 3)(z_1 - z_4) = x_0 + (-2t + 7)d + i(y_0 - d)
\end{aligned}$$

Dann ist die gesamte Kurve γ durch eine Zusammensetzung von A, B, C und D (dies ist möglich, da

$A(1) = B(1)$, $B(2) = C(2)$ und $C(3) = D(3)$ gilt) gegeben durch

$$\gamma := A \oplus B \oplus C \oplus D : [0,4] \to \mathbb{C} \text{ mit } \gamma(t) := \begin{cases} A(t) & , 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ B(t) & , 1 \leqslant t \leqslant 2 \\ C(t) & , 2 \leqslant t \leqslant 3 \\ D(t) & , 3 \leqslant t \leqslant 4 \end{cases}$$

γ wird in der Literatur auch als *Polygonzug* bezeichnet. Insbesondere gilt $\gamma(0) = \gamma(4)$, weswegen es sich bei γ um eine *geschlossene* Kurve (bzw. einem *geschlossenen* Integrationsweg) handelt. Kommen wir nun zur Berechnung des Integrals

$$\int_\gamma (z - z_0)^m \, dz \qquad (m \in \mathbb{Z})$$

Bei der Berechnung müssen wir für $m \in \mathbb{Z}$ zwei Fälle unterscheiden:
1. Fall: $(m \neq -1)$

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma (z - z_0)^m \, dz = \int_{A \oplus B \oplus C \oplus D} (z - z_0)^m \, dz \\
&= \int_A (z - z_0)^m \, dz + \int_B (z - z_0)^m \, dz + \int_C (z - z_0)^m \, dz + \int_D (z - z_0)^m \, dz \\
&= \int_0^1 (z_1 + t(z_2 - z_1) - z_0)^m \cdot (z_2 - z_1) \, dt + \int_1^2 (z_2 + (t-1)(z_3 - z_2) - z_0)^m \cdot (z_3 - z_2) \, dt \\
&+ \int_2^3 (z_3 + (t-2)(z_4 - z_3) - z_0)^m \cdot (z_4 - z_3) \, dt + \int_3^4 (z_4 + (t-3)(z_1 - z_4) - z_0)^m \cdot (z_1 - z_4) \, dt \\
&= \left[\frac{1}{m+1} (z_1 + t(z_2 - z_1) - z_0)^{m+1} \right]_0^1 + \left[\frac{1}{m+1} (z_2 + (t-1)(z_3 - z_2) - z_0)^{m+1} \right]_1^2 \\
&+ \left[\frac{1}{m+1} (z_3 + (t-2)(z_4 - z_3) - z_0)^{m+1} \right]_2^3 + \left[\frac{1}{m+1} (z_4 + (t-3)(z_1 - z_4) - z_0)^{m+1} \right]_3^4 \\
&= \frac{1}{m+1} \Big((z_2 - z_0)^{m+1} - (z_1 - z_0)^{m+1} + (z_3 - z_0)^{m+1} - (z_2 - z_0)^{m+1} + (z_4 - z_0)^{m+1} \\
&- (z_3 - z_0)^{m+1} + (z_1 - z_0)^{m+1} - (z_4 - z_0)^{m+1} \Big) = \frac{1}{m+1} \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

2. Fall: $(m = -1)$
Da der komplexe Logarithmus nicht auf ganz $\mathbb{C}$ stetig und holomorph ist, muss hier Achtung gegeben werden (siehe: Abschlussbemerkung). Wir beweisen in Kürze, dass

$$\int_A \frac{1}{z - z_0} \, dz = \int_B \frac{1}{z - z_0} \, dz = \int_C \frac{1}{z - z_0} \, dz = \int_D \frac{1}{z - z_0} \, dz = -\frac{\pi}{2} i$$

gilt und erhalten daraus unmittelbar

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{z - z_0} \, dz &= \int_{A \oplus B \oplus C \oplus D} \frac{1}{z - z_0} \, dz \\
&= \int_A \frac{1}{z - z_0} \, dz + \int_B \frac{1}{z - z_0} \, dz + \int_C \frac{1}{z - z_0} \, dz + \int_D \frac{1}{z - z_0} \, dz \\
&= 4 \cdot \left(-\frac{\pi}{2} i \right) = -2\pi i
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass das Integral über jede dieser Verbindungsstrecken A, B, C und D den Wert $-\frac{\pi}{2} i$ annimmt. Dabei sei auf die Definition des Kurvenintegrals hingewiesen und an die Ableitungen der Kurven $A'(t) = 2di$, $B'(t) = 2d$, $C'(t) = -2di$ und $D'(t) = -2d$ erinnert. Alle vier Integral lassen sich nun auf dieselbe Art und Weise berechnen. Man beachte, dass alle Ergebnis unabhängig von d sind. Unter Verwendung von

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = [\ln |f(x)|]_a^b \quad \text{und} \quad \int_a^b -\frac{1}{1 + x^2} \, dx = [-\arctan(x)]_a^b$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{1}{z-z_0}\,dz &= \int_0^1 \frac{2di}{-d+i(2t-1)d}\,dt = \int_0^1 \frac{2di(-d-i(2t-1)d)}{d^2+(2t-1)^2d^2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{4d^2(2t-1)}{d^2+(2t-1)^2d^2}\,dt + i\int_0^1 \frac{-2d^2}{d^2+(2t-1)^2d^2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left|d^2+(2t-1)^2d^2\right|\right]_0^1 + i\left[-\arctan(2t-1)\right]_0^1 && (d>0) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left|2d^2\right| - \ln\left|2d^2\right|\right) + i\left(-\arctan(1)-(-\arctan(-1))\right) \\
&= i\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}i \\
\int_B \frac{1}{z-z_0}\,dz &= \int_1^2 \frac{2d}{(-3+2t)d+id}\,dt = \int_1^2 \frac{2d((-3+2t)d-id)}{(-3+2t)^2d^2+d^2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{4d^2(-3+2t)}{(-3+2t)^2d^2+d^2}\,dt + i\int_1^2 \frac{-2d^2}{(-3+2t)d^2+d^2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left|(-3+2t)^2d^2+d^2\right|\right]_1^2 + i\left[-\arctan(-3+2t)\right]_1^2 && (d>0) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left|2d^2\right| - \ln\left|2d^2\right|\right) + i\left(-\arctan(1)-(-\arctan(-1))\right) \\
&= i\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}i \\
\int_C \frac{1}{z-z_0}\,dz &= \int_2^3 \frac{-2di}{d+i(-2t+5)d}\,dt = \int_2^3 \frac{-2di(d-i(-2t+5)d)}{d^2+(-2t+5)^2d^2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{-4(-2t+5)d^2}{d^2+(-2t+5)^2d^2}\,dt + i\int_2^3 \frac{-2d^2}{d^2+(-2t+5)^2d^2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left|d^2+(-2t+5)^2d^2\right|\right]_2^3 + i\left[-\arctan(2t-5)\right]_2^3 && (d>0) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left|2d^2\right| - \ln\left|2d^2\right|\right) + i\left(-\arctan(1)-(-\arctan(-1))\right) \\
&= i\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}i \\
\int_D \frac{1}{z-z_0}\,dz &= \int_3^4 \frac{-2d}{(-2t+7)d-id}\,dt = \int_3^4 \frac{-2d((-2t+7)d+id)}{(-2t+7)^2d^2+d^2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_3^4 \frac{-4(-2t+7)^2d^2}{(-2t+7)^2d^2+d^2}\,dt + i\int_3^4 \frac{-2d^2}{(-2t+7)^2d^2+d^2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left|(-2t+7)^2d^2+d^2\right|\right]_3^4 + i\left[-\arctan(2t-7)\right]_3^4 && (d>0) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left|2d^2\right| - \ln\left|2d^2\right|\right) + i\left(-\arctan(1)-(-\arctan(-1))\right) \\
&= i\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}i
\end{aligned}$$

Abschlussbemerkung: Der komplexe Logarithmus $\log : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ ist stetig und holomorph in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, wobei $\mathbb{R}_- := \{z \in \mathbb{R} \mid z \leqslant 0\}$.

Aufgabe 22

Die Funktion f sei außerhalb des Kreises $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| = r_0\}$ (mit $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r_0 > 0$) stetig. Es bezeichne $M(r)$ das Maximum von $|f|$ auf der Menge aller z mit $|z-z_0| = r > r_0$. Es gelte $\lim_{r\to\infty} rM(r) = 0$. Zeige, dass dann auch

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = 0$$

gilt, wobei γ_r einen Kreisbogen um z_0 mit dem Radius r bezeichne.

Lösung:
Zunächst ist der Integrationsweg γ_r ($r \in \mathbb{R}$ mit $r > r_0 > 0$) gegeben durch

$$\gamma_r : [a,b] \to \mathbb{C} \text{ mit } \gamma_r(t) := z_0 + re^{it}$$

wobei $0 \leqslant a < b \leqslant 2\pi$ beliebig, aber fest gewählt sind. Die Kurvenlänge von γ_r ist gegeben durch

$$\begin{aligned} L(\gamma_r) &= \int_a^b |\gamma_r'(t)|\,dt = \int_a^b \left|rie^{it}\right| dt = \int_a^b \sqrt{r^2\left(\cos^2(t)+\sin^2(t)\right)}dt = \int_a^b \sqrt{r^2}dt \\ &= |r| \int_a^b dt = (b-a)r \quad \forall\, 0 \leqslant a < b \leqslant 2\pi \end{aligned}$$

Aus der Standardabschätzung (SA) des Kurvenintegrals und der Bogenlänge $L(\gamma_r)$ aus der vorherigen Zeile erhalten wir:

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} \left| \int_{\gamma_r} f(z)\,dz \right| &\overset{\text{(SA)}}{\leqslant} \lim_{r\to\infty} L(\gamma_r) \cdot \max_{z \in \operatorname{Sp}(\gamma_r)} |f(z)| \leqslant \lim_{r\to\infty} \underbrace{L(\gamma_r)}_{=(b-a)r} \cdot \underbrace{\max_{z\in\partial B_r(z_0)} |f(z)|}_{=M(r)} \\ &= (b-a) \cdot \underbrace{\lim_{r\to\infty} rM(r)}_{\overset{\text{nach Vor.}}{=} 0} = (b-a)\cdot 0 = 0 \quad \forall\, 0 \leqslant a < b \leqslant 2\pi \end{aligned}$$

Aufgabe 23
Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ mit } f(z) := \operatorname{Re}(z)$$

keine Stammfunktion besitzt.

Lösung:
Erinnerung:
Satz: $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig auf D. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1): f besitze eine Stammfunktion in D (d.h. f ist integrabel in D)
(2): $\forall\, \gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\gamma(a) = \gamma(b)$ und $\operatorname{Sp}(\gamma) \subset D$:
$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$
(3): $\exists\, F : D \to \mathbb{C}$ holomorph in D $\forall\, \gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $\operatorname{Sp}(\gamma) \subset D$:
$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$
(4): $\forall\, \alpha : [a,b] \to \mathbb{C}\ \wedge\ \forall\, \beta : [c,d] \to \mathbb{C}$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$, $\alpha(a) = \beta(c)$, $\alpha(b) = \beta(d)$, $\operatorname{Sp}(\alpha) \subset D$ und $\operatorname{Sp}(\beta) \subset D$:
$$\int_\alpha f(z)dz = \int_\beta f(z)dz$$

Angenommen die Funktion $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ (die offensichtlich stetig auf ganz $\mathbb{C}$ ist) besitzt eine Stammfunktion, so müsste das Integral über jede geschlossene Kurve γ verschwinden (siehe (2)), d.h.

$$\int_\gamma \operatorname{Re}(z)\,dz = 0$$

Also müsste dies auch speziell für den folgenden geschlossenen Integrationsweg gelten:

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C} \text{ mit } \gamma(t) = re^{it} \quad (r > 0)$$

der offenbar die Ableitung $\gamma'(t) = ire^{it}$ besitzt. Aber tatsächlich gilt:

$$\int_\gamma \mathrm{Re}(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(re^{it}) \cdot ire^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} r\cos(t) \cdot ire^{it}\,dt$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} -\cos(t)\sin(t)\,dt + ir^2 \int_0^{2\pi} (\cos(t))^2\,dt$$

$$= r^2 \left[\frac{1}{2}(\cos(t))^2\right]_0^{2\pi} + ir^2 \left[\frac{1}{2}\sin(t)\cos(t) + \frac{1}{2}t\right]_0^{2\pi}$$

$$= r^2 \Big[\underbrace{\frac{1}{2}(\cos(2\pi))^2}_{=\frac{1}{2}} - \underbrace{\frac{1}{2}(\cos(0))^2}_{=\frac{1}{2}}\Big] + ir^2 \Big[\underbrace{\frac{1}{2}\sin(2\pi)\cos(2\pi)}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2\pi}_{=\pi} - \Big(\underbrace{\frac{1}{2}\sin(0)\cos(0)}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 0}_{=0}\Big)\Big]$$

$$= i\pi r^2 \neq 0$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass f eine Stammfunktion besitzt. Folglich besitzt die Funktion f keine Stammfunktion.

Aufgabe 24

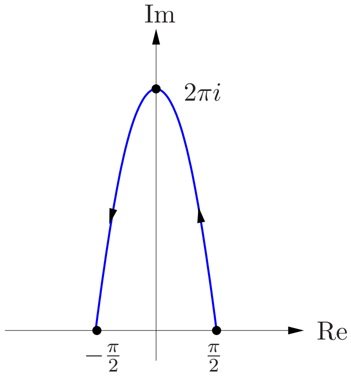
Berechne die folgenden Integrale

(1): $\int_\gamma (z+i)^2\,dz$ (3): $\int_\gamma ze^{i(z^2)}$

(2): $\int_\gamma z\cos(z)\,dz$

wobei γ die halbe Ellipse ist, welche von $\frac{\pi}{2}$ durch $2\pi i$ nach $-\frac{\pi}{2}$ führt und die Hauptachsen auf den Koordinatenachsen hat.

Lösung:



Zunächst ist der Weg γ gegeben durch

$$\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{C} \text{ mit } \gamma(t) := \frac{\pi}{2}\cos(t) + i \cdot 2\pi\sin(t)$$

Dann ist die Ableitung $\gamma'(t) = -\frac{\pi}{2}\sin(t) + i \cdot 2\pi\cos(t)$. Zur Lösung der Aufgaben zeigen wir im Teil (1) zwei Varianten. Die erste Variante ist, dass man alles durchrechnet (sehr rechenaufwendig) (-> Variante 1). Die andere Variante ist, dass man eine Stammfunktion träumt (-> Variante 2). Anschließend geht alles ganz einfach.

zu (1):

Variante 1: (ausrechnen)

Um uns im folgenden etwas Schreibarbeit zu ersparen, nennen wir vorweg einige notwendige Stammfunktionen:

$$\int \cos^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\cos(t)\sin(t) + \frac{1}{2}t \qquad \int \sin^2(t)\,dt = -\frac{1}{2}\cos(t)\sin(t) + \frac{1}{2}t$$
$$\int \cos^3(t)\,dt = \frac{1}{3}\cos^2(t)\sin(t) + \frac{2}{3}\sin(t) \qquad \int \sin^3(t)\,dt = -\frac{1}{3}\cos(t)\sin^2(t) + \frac{2}{3}\cos(t)$$
$$\int \cos^2(t)\sin(t)\,dt = -\frac{1}{2}\cos^3(t) \qquad \int \cos(t)\sin^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\sin^3(t)$$
$$\int \cos(t)\sin(t)\,dt = -\frac{1}{2}\cos^2(t)$$

Kommen wir nun zur Aufgabe:

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma (z+i)^2\,dz = \int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2}\cos(t) + i\,(2\pi\sin(t)+1)\right)^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\sin(t) + i2\pi\cos(t)\right)\,dt \\
&= \int_0^\pi -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\pi^2\cos^2(t) - 4\pi^2\sin^2(t) - 4\pi\sin(t) - 1\right)\pi\sin(t) \\
&\qquad\quad - 2\left(2\pi^2\cos(t)\sin(t) + \pi\cos(t)\right)\pi\cos(t)\,dt \\
&+i\int_0^\pi -\frac{1}{2}\left(2\pi^2\cos(t)\sin(t) + \pi\cos(t)\right)\pi\sin(t) \\
&\qquad\quad + 2\left(\frac{1}{4}\pi^2\cos^2(t) - 4\pi^2\sin^2(t) - 4\pi\sin(t) - 1\right)\pi\cos(t)\,dt
\end{aligned}$$

Wir berechnen zunächst den Realteil des Integrals:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\pi^2\cos^2(t) - 4\pi^2\sin^2(t) - 4\pi\sin(t) - 1\right)\pi\sin(t) \\
&\qquad\quad - 2\left(2\pi^2\cos(t)\sin(t) + \pi\cos(t)\right)\pi\cos(t)\,dt \\
&= -\frac{33}{8}\pi^3\int_0^\pi \cos^2(t)\sin(t)\,dt + 2\pi^3\int_0^\pi \sin^3(t)\,dt + 2\pi^2\int_0^\pi \sin^2(t)\,dt \\
&\qquad\quad + \frac{1}{2}\pi\int_0^\pi \sin(t)\,dt - 2\pi^2\int_0^\pi \cos^2(t)\,dt \\
&= -\frac{88}{3}\pi^3\cdot\frac{2}{3} + 2\pi^3\cdot\frac{4}{3} + 2\pi^2\cdot\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\cdot 2 - 2\pi^2\cdot\frac{1}{2}\pi \\
&= -\frac{1}{12}\pi^2 + \pi
\end{aligned}$$

Als nächstes berechnen wir den Imaginärteil des Integrals:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi -\frac{1}{2}\left(2\pi^2\cos(t)\sin(t) + \pi\cos(t)\right)\pi\sin(t) \\
&\qquad\quad + 2\left(\frac{1}{4}\pi^2\cos^2(t) - 4\pi^2\sin^2(t) - 4\pi\sin(t) - 1\right)\pi\cos(t)\,dt \\
&= -9\pi^3\int_0^\pi \cos(t)\sin^2(t)\,dt - \frac{17}{2}\pi^2\int_0^\pi \cos(t)\sin(t)\,dt + \frac{1}{2}\pi^3\int_0^\pi \cos^3(t)\,dt - 2\pi\int_0^\pi \cos(t)\,dt \\
&= -9\pi^3\cdot 0 - \frac{17}{2}\pi^2\cdot 0 + \frac{1}{2}\pi^3\cdot 0 - 2\pi\cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt die Lösung

$$\int_\gamma (z+i)^2\,dz = -\frac{1}{12}\pi^3 + \pi$$

<u>Variante 2:</u> (Stammfunktion träumen)
Wir träumen kurz (mit Maple) und stellen die folgende Vermutung auf:

$$\frac{1}{3}(z+i)^3 \text{ ist die Stammfunktion von } (z+i)^2$$

Dazu müssen wir zeigen:

$$\text{(i): } \frac{1}{3}(z+i)^3 \text{ ist holomorph}$$
$$\text{(ii): } \left(\frac{1}{3}(z+i)^3\right)' = (z+i)^2$$

(i) gilt, da die Funktion $z+i$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist, also auch $(z+i)^3$ und damit auch $\frac{1}{3}(z+i)^3$. (ii) gilt wegen der Kettenregel. Damit können wir den folgenden Satz anwenden:
Satz: $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig in D, F Stammfunktion von f. Dann gilt für jede glatte (d.h. stetig differenzierbare) Kurve $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\alpha) \subset D$:

$$\int_\alpha f(z)\,dz = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a))$$

Speziell für $f(z) = (z+i)^2$, $F(z) = \frac{1}{3}(z+i)^3$ und $\alpha = \gamma$ erhalten wir:

$$\int_\gamma (z+i)^2\,dz = \frac{1}{3}(\underbrace{\gamma(\pi)}_{=-\frac{\pi}{2}}+i)^3 - \frac{1}{3}(\underbrace{\gamma(0)}_{=\frac{\pi}{2}}+i)^3 = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\pi^3 + 3\pi\right) = -\frac{1}{12}\pi^3 + \pi$$

<u>zu (2):</u>
<u>Variante 1:</u> (ausrechnen)
Da diese Berechnung sehr aufwendig ist und die Integranten sehr lang werden, zeigen wir nur die Variante 2. Für Variante 1 sei lediglich auf die Hyperbelfunktionen des Cosinus und des Sinus hingewiesen.
<u>Variante 2:</u> (Stammfunktion träumen)
Wir träumen wieder kurz (mit Maple) und stellen die folgende Vermutung auf:

$$\cos(z) + z\sin(z) \text{ ist die Stammfunktion von } z\cos(z)$$

Dazu müssen wir zeigen:

$$\text{(i): } \cos(z) + z\sin(z) \text{ ist holomorph}$$
$$\text{(ii): } (\cos(z) + z\sin(z))' = z\cos(z)$$

(i) gilt, da die Funktionen $\cos(z)$, $\sin(z)$ und z allesamt auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph sind, also auch $\cos(z) + z\sin(z)$. (ii) gilt aufgrund der Linearität (L) und Produktregel (P):

$$(\cos(z) + z\sin(z))' \overset{(L)}{=} (\cos(z))' + (z\sin(z))' \overset{(P)}{=} -\sin(z) + \sin(z) + z\cos(z) = z\cos(z)$$

Damit können wir den in (1) genannten Satz anwenden. Speziell für $f(z) = z\cos(z)$, $F(z) = \cos(z) + z\sin(z)$ und $\alpha = \gamma$ erhalten wir:

$$\int_\gamma z\cos(z)\,dz = \underbrace{\cos(\underbrace{\gamma(\pi)}_{=-\frac{\pi}{2}})}_{=0} + \underbrace{\underbrace{\gamma(\pi)}_{=-\frac{\pi}{2}}\underbrace{\sin(\underbrace{\gamma(\pi)}_{=-\frac{\pi}{2}})}_{=-1}}_{=\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\cos(\underbrace{\gamma(0)}_{=\frac{\pi}{2}})}_{=0} - \underbrace{\underbrace{\gamma(0)}_{=\frac{\pi}{2}}\underbrace{\sin(\underbrace{\gamma(0)}_{=\frac{\pi}{2}})}_{=1}}_{=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

<u>zu (3):</u>
<u>Variante 1:</u> (ausrechnen)
Da diese Berechnung sehr aufwendig ist und die Integranten sehr lang werden, zeigen wir nur die Variante 2.
<u>Variante 2:</u> (Stammfunktion träumen)
Wir träumen nun ein letztes Mal und stellen dabei die folgende Vermutung auf:

$$\frac{1}{2i}e^{i(z^2)} \text{ ist die Stammfunktion von } ze^{i(z^2)}$$

Dazu müssen wir zeigen:

(i): $\dfrac{1}{2i}e^{i(z^2)}$ ist holomorph

(ii): $\left(\dfrac{1}{2i}e^{i(z^2)}\right)' = ze^{i(z^2)}$

(i) gilt, da die Funktionen e^z, iz^2 und $\frac{1}{2i}$ allesamt auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph sind, also auch $\frac{1}{2i}e^{i(z^2)}$. (ii) gilt aufgrund der Produktregel (P) und Kettenregel (K):

$$\left(\frac{1}{2i}e^{i(z^2)}\right)' \overset{(P)}{=} \frac{1}{2i}\cdot\left(e^{i(z^2)}\right)' \overset{(K)}{=} \frac{1}{2i}\cdot\left(iz^2\right)'\cdot e^{i(z^2)} \overset{(P)}{=} \frac{1}{2i}\cdot 2iz\cdot e^{i(z^2)} = ze^{i(z^2)}$$

Damit könne wir den in (1) genannten Satz anwenden. Speziell für $f(z) = ze^{i(z^2)}$, $F(z) = \frac{1}{2i}e^{i(z^2)}$ und $\alpha = \gamma$ erhalten wir:

$$\int_\gamma ze^{i(z^2)}\,dz = \frac{1}{2i}\cdot e^{i(\gamma(\pi))^2} - \frac{1}{2i}\cdot e^{i(\gamma(0))^2} = \frac{1}{2i}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} - \frac{1}{2i}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = 0$$