Aufgabe 25

(a): Für welche Zahl $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die folgende Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$$

Auf welchem Gebiet ist diese Konvergenz gleichmäßig?

Lösung:

Erinnerung:

Weierstraßsches Majorantenkriterium (für Funktionenreihen): $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergente Reihe mit $a_n \in \mathbb{R}_+$ $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$, $U \subset \mathbb{C}$, $f_n : U \longrightarrow \mathbb{C}$ Funktionen mit $\|f_n\|_\infty := \sup_{z\in U} |f_n(z)| \leqslant a_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ ist gleichmäßig konvergent auf } U$$

1. Fall: ($|z| > 1$, d.h. $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{E}$)

Offensichtlich bildet die Funktionenfolge $\frac{z^n}{1-z^n}$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ keine Nullfolge bezüglich des Grenzübergangs $n \to \infty$. Dies ist leicht mit einem Widerspruch zu verifizieren: Angenommen diese Funktionenfolge bildet eine Nullfolge, so gilt,

$$\frac{z^n}{1-z^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\frac{z^n}{1-z^n}\right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Wegen $|z|^n \to \infty$ für $n \to \infty$ (da $|z| > 1$) erhalten wir

$$\left|\frac{z^n}{1-z^n}\right| = \left|\frac{1}{\frac{1}{z^n} - 1}\right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

woraus direkt ein Widerspruch hervorgeht. Folglich muss die Reihe divergieren und ist somit weder konvergent noch gleichmäßig konvergent in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{E}$, wobei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe bezeichnet.

2. Fall: ($|z| = 1$, d.h. $z \in \partial\mathbb{E}$)

Offenbar lässt sich z eindeutig in Polarkoordinaten darstellen durch $z = re^{i\varphi}$ mit $r \in \mathbb{R}_+^*$ und $\varphi \in]-\pi, \pi]$. Wegen $r = |z| \overset{!}{=} 1$ gilt sogar $z = e^{i\varphi}$. Den Beweis erhält man nun durch einen Widerspruch: Angenommen die Reihe konvergiert für $|z| = 1$, so müsste der Summand $\frac{z^n}{1-z^n}$ eine Nullfolge (für $n \to \infty$) für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ bilden. Da der Betrag des Summanden nicht gegen 0 konvergiert (Hinweis: $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$)

$$\frac{|z^n|}{|1-z^n|} = \frac{|e^{i\varphi n}|}{|1-e^{i\varphi n}|} = \frac{\left|e^{i\frac{\varphi}{2}n}\right|}{\left|e^{-i\frac{\varphi}{2}n} - e^{i\frac{\varphi}{2}n}\right|} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\varphi}{2}n\right)} \nrightarrow 0 \text{ (für } n \to \infty)$$

konvergiert auch der Summand nicht gegen 0 (denn: $z_n \to z \Longrightarrow |z_n| \to |z|$, also $|z_n| \nrightarrow |z| \Longrightarrow z_n \nrightarrow z$). Somit erzeugt der Summand keine Nullfolge und es folgt der Widerspruch. Die Reihe ist in $\partial\mathbb{E}$ demnach weder konvergent noch gleichmäßig konvergent. Beachte: Falls es zu einem festen $\varphi \in [-\pi, \pi[$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\sin\left(\frac{\varphi}{2}n\right) = 0$, so ist die Reihe nicht wohldefiniert.

3. Fall: ($|z| < 1$, d.h. $z \in \mathring{\mathbb{E}}$)

Unser Ziel ist es, das Majorantenkriterium anzuwenden. Dazu sei wähle $0 \leqslant r < 1$. Betrachte $a_n := \frac{r^n}{1-r}$ für $n \in \mathbb{N}$. Wegen $0 \leqslant r < 1$ gilt offenbar $a_n \in \mathbb{R}_+$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Weiter gilt unter Verwendung der geometrischen Reihe (die im Übrigen bei 0 beginnt):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r}\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}\left[\frac{1}{1-r} - 1\right] = \frac{r}{(1-r)^2} \qquad \forall\, 0 \leqslant r < 1$$

Damit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gegen $\frac{r}{(1-r)^2}$. Betrachte nun $U := \mathring{\mathbb{E}}$ und $f_n : \mathring{\mathbb{E}} \to \mathbb{C}$ mit $f_n(z) := \frac{z^n}{1-z^n}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $0 \leqslant |z| \leqslant r < 1$ die

Hilfsaussage (HA)

$$|1-z^n| = |1+(-z^n)| \geqslant |1-|-z^n|| = \underbrace{|1-\underbrace{\underbrace{|z|^n}_{\leqslant r^n}}_{\geqslant -r^n}|}_{\geqslant 1-r^n} \geqslant |1-r^n| = 1-\underbrace{\underbrace{r^n}_{\leqslant r}}_{\geqslant -r} \geqslant 1-r > 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{|1-z^n|} \leqslant \frac{1}{1-r}$$

und daraus erhalten wir wiederum die Abschätzung für das Supremum (bzw. die Majorante)

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{z\in B_r(0)} |f_n(z)| = \sup_{z\in B_r(0)} \left|\frac{z^n}{1-z^n}\right| = \sup_{z\in B_r(0)} \underbrace{\frac{1}{|1-z^n|}}_{\overset{\text{(HA)}}{\leqslant} \frac{1}{1-r}} \cdot \underbrace{|z|^n}_{\leqslant r^n} \leqslant \frac{r^n}{1-r} \quad \forall n\in\mathbb{N}\,\forall\, 0\leqslant r<1$$

Das Majorantenkriterium von Weierstraß (für Funktionenreihen) liefert uns daher für $0 \leqslant |z| \leqslant r < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n} \text{ ist auf jeder kompakten Kugel } B_r(0) \text{ in } \overset{\circ}{\mathbb{E}} := \{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\} \text{ gleichmäßig konvergent}$$

also insbesondere konvergent in $\overset{\circ}{\mathbb{E}}$.

Aufgabe 26

Berechnen Sie mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die folgenden Integrale:

(1): $\displaystyle\oint_{|z+1|=1} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)}\,dz$ (3): $\displaystyle\oint_{|z-i|=1} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)}\,dz$

(2): $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)}\,dz$ (4): $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)}\,dz$

Hinweis: Benutzen Sie Partialbruchzerlegung.

Lösung:

Erinnerung:

Cauchyscher Integralsatz: $U\subset\mathbb{C}$ offen, $f:U\to\mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall\,\gamma \text{ geschlossener Integrationsweg mit } |\gamma|\subset U \text{ und } \operatorname{int}(\gamma)\subset U$$

Cauchyscher Integralformel (für Kreisscheiben): $U\subset\mathbb{C}$ offen, $f:U\to\mathbb{C}$ holomorph, $c\in U$, $B:=B_r(c):=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-c|<r\}$ offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt c und Radius $r>0$, $\overline{B}\subset U$, $\zeta\in B$, $n\in\mathbb{N}$. Dann gilt:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_{\partial B}\frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz \qquad \textit{(Cauchysche Integralformel)}$$

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i}\cdot\oint_{\partial B}\frac{f(z)}{(z-\zeta)^{n+1}}\,dz \qquad \textit{(Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel)}$$

wobei ∂B die positiv orientierte Kurve über den Rand von B ist, d.h.

$$\partial B : [0,2\pi]\to\mathbb{C} \text{ mit } t\mapsto c+re^{it}$$

Partialbruchzerlegung (PBZ):

$$\frac{1}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{A}{(z+1)} + \frac{B}{(z-1)} + \frac{C}{(z-1)^2} = \frac{z^2(A+B)+z(-2A+C)+(A-B+C)}{(z-1)^2(z+1)}$$

Damit erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}):&\ A+B=0\\(\mathrm{II}):&\ -2A+C=0\\(\mathrm{III}):&\ A-B+C=1\end{aligned}$$

Lösen wir dieses Gleichungssystem auf, so erhalten wir $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$, $C=\frac{1}{2}$ und damit die Darstellung

$$\frac{1}{(z-1)^2(z+1)}=\frac{\frac{1}{4}}{(z+1)}+\frac{-\frac{1}{4}}{(z-1)}+\frac{\frac{1}{2}}{(z-1)^2}$$

<u>zu (1):</u>
Die Kurve $|z+1|=1$ ist gegeben durch

$$\alpha:[0,2\pi]\to\mathbb{C}\text{ mit }\alpha(t):=-1+e^{it}$$

Es ist mit Hilfe der Partialbruchzerlegung (PBZ):

$$\oint_\alpha\frac{1}{(z-1)^2(z+1)}\,dz=\oint_\alpha\frac{\frac{1}{4}}{(z+1)}\,dz+\oint_\alpha\frac{-\frac{1}{4}}{(z-1)}\,dz+\oint_\alpha\frac{\frac{1}{2}}{(z-1)^2}\,dz$$

Für das erste Integral sind mit „$U:=\mathbb{C}$ offen, $f:U\to\mathbb{C}$ mit $f(z):=\frac{1}{4}$ holomorph, $c:=-1\in U$, $B:=B_1(-1)$ mit $r:=1>0$, $\overline{B}\subset U$, $\zeta:=-1\in B$“ die Voraussetzungen der Cauchyschen Integralformel erfüllt und es folgt:

$$\oint_\alpha\frac{\frac{1}{4}}{(z+1)}\,dz=2\pi i\cdot f(-1)=\frac{2\pi i}{4}=\frac{\pi i}{2}$$

Für das zweite (bzw. dritte) Integral sind mit „$U:=\mathbb{C}\backslash\{1\}$ offen, $f:U\to\mathbb{C}$ mit $f(z):=\frac{-\frac{1}{4}}{(z-1)}$ (bzw. $f(z):=\frac{\frac{1}{2}}{(z-1)^2}$) holomorph“ die Voraussetzungen des Cauchyschen Integralsatzes erfüllt. Da α ein geschlossener Integrationsweg ist (d.h. $\alpha(0)\overset{!}{=}\alpha(2\pi)=0$) und desweiteren $|\alpha|=\partial B_1(-1)\subset U$ sowie $\mathrm{int}(\alpha)=B_1(-1)\subset U$ erfüllt ist, gilt für die Kurve α nach dem Cauchyschen Integralsatz:

$$\oint_\alpha\frac{-\frac{1}{4}}{(z-1)}\,dz=0$$
$$\oint_\alpha\frac{\frac{1}{2}}{(z-1)^2}\,dz=0$$

Insgesamt erhalten wir daher

$$\oint_\alpha\frac{1}{(z-1)^2(z+1)}\,dz=\frac{\pi i}{2}$$

Alternativ und kürzer:

$$\int_\alpha\frac{1}{(z-1)^2(z+1)}dz=\int_\alpha\frac{\frac{1}{(z-1)^2}}{(z+1)}dz\overset{(\mathrm{CIF})}{=}\frac{1}{((-1)-1)^2}\cdot2\pi i=\frac{\pi i}{2}$$

<u>zu (2):</u>
Die Kurve $|z-1|=1$ ist gegeben durch

$$\beta:[0,2\pi]\to\mathbb{C}\text{ mit }\beta(t):=1+e^{it}$$

Es ist mit Hilfe der Partialbruchzerlegung (PBZ):

$$\oint_\beta\frac{1}{(z-1)^2(z+1)}\,dz=\oint_\beta\frac{\frac{1}{4}}{(z+1)}\,dz+\oint_\beta\frac{-\frac{1}{4}}{(z-1)}\,dz+\oint_\beta\frac{\frac{1}{2}}{(z-1)^2}\,dz$$

Für das erste Integral sind mit „$U := \mathbb{C}\backslash\{-1\}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := \frac{\frac{1}{4}}{(z+1)}$ holomorph“ die Voraussetzungen des Cauchyschen Integralsatzes erfüllt. Da β ein geschlossener Integrationsweg ist (d.h. $\beta(0) \overset{!}{=} \beta(2\pi) = 2$) und desweiteren $|\beta| = \partial B_1(1) \subset U$ sowie $\mathrm{int}(\beta) = B_1(1) \subset U$ erfüllt ist, gilt für die Kurve β nach dem Cauchyschen Integralsatz:

$$\oint_\beta \frac{\frac{1}{4}}{(z+1)}\,dz = 0$$

Für das zweite (bzw. dritte) Integral sind mit „$U := \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := -\frac{1}{4}$ (bzw. $f(z) := \frac{1}{2}$) holomorph, $c := 1 \in U$, $B := B_1(1)$ mit $r := 1 > 0$, $\overline{B} \subset U$, $\zeta := 1 \in B$“ die Voraussetzungen der Cauchyschen Integralformel (bzw. der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel mit $n = 1$) erfüllt und es folgt:

$$\oint_\beta \frac{-\frac{1}{4}}{(z-1)}\,dz = 2\pi i \cdot f(1) = -\frac{2\pi i}{4} = -\frac{\pi i}{2}$$
$$\oint_\beta \frac{\frac{1}{2}}{(z-1)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot f'(1) = 0$$

Insgesamt erhalten wir daher

$$\oint_\beta \frac{1}{(z-1)^2(z+1)}\,dz = -\frac{\pi i}{2}$$

Alternativ und kürzer:

$$\int_\beta \frac{1}{(z-1)^2(z+1)}dz = \int_\beta \frac{\frac{1}{(z+1)}}{(z-1)^2}dz \overset{\text{(CIF)}}{=} \frac{2\pi i}{(2-1)!} \cdot \left(\frac{1}{z+1}\right)^{(1)}(1) = -\frac{\pi i}{2}$$

<u>zu (3):</u>
Die Kurve $|z - i| = 1$ ist gegeben durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \text{ mit } \gamma(t) := i + e^{it}$$

Es ist mit Hilfe der Partialbruchzerlegung (PBZ):

$$\oint_\gamma \frac{1}{(z-1)^2(z+1)}\,dz = \oint_\gamma \frac{\frac{1}{4}}{(z+1)}\,dz + \oint_\gamma \frac{-\frac{1}{4}}{(z-1)}\,dz + \oint_\gamma \frac{\frac{1}{2}}{(z-1)^2}\,dz$$

Für das erste (bzw. zweite, bzw. dritte) Integral sind mit „$U := \mathbb{C}\backslash\{-1\}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := \frac{\frac{1}{4}}{(z+1)}$ (bzw. $f(z) := \frac{-\frac{1}{4}}{(z-1)}$, bzw. $f(z) := \frac{\frac{1}{2}}{(z-1)^2}$) holomorph“ die Voraussetzungen des Cauchyschen Integralsatzes erfüllt. Da γ ein geschlossener Integrationsweg ist (d.h. $\gamma(0) \overset{!}{=} \gamma(2\pi) = 1 + i$) und desweiteren $|\gamma| = \partial B_1(i) \subset U$ sowie $\mathrm{int}(\gamma) = B_1(i) \subset U$ erfüllt ist, gilt für die Kurve β nach dem Cauchyschen Integralsatz:

$$\oint_\gamma \frac{\frac{1}{4}}{(z+1)}\,dz = 0$$
$$\oint_\gamma \frac{-\frac{1}{4}}{(z-1)}\,dz = 0$$
$$\oint_\gamma \frac{\frac{1}{2}}{(z-1)^2}\,dz = 0$$

Insgesamt erhalten wir daher

$$\oint_\gamma \frac{1}{(z-1)^2(z+1)}\,dz = 0$$

Alternativ und kürzer:

$$\int_\gamma \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} dz \overset{\text{(CIS)}}{=} 0$$

zu (4):
Die Kurve $|z| = 2$ ist gegeben durch

$$\delta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \text{ mit } \delta(t) := 2 \cdot e^{it}$$

Es ist mit Hilfe der obigen Partialbruchzerlegung (PBZ):

$$\oint_\delta \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} dz = \oint_\delta \frac{\frac{1}{4}}{(z+1)} dz + \oint_\delta \frac{-\frac{1}{4}}{(z-1)} dz + \oint_\delta \frac{\frac{1}{2}}{(z-1)^2} dz$$

Für das erste (bzw. zweite, bzw. dritte) Integral sind mit „$U := \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := \frac{1}{4}$ (bzw. $f(z) := -\frac{1}{4}$, bzw. $f(z) := \frac{1}{2}$) holomorph, $c := 0 \in U$, $B := B_2(0)$ mit $r := 2 > 0$, $\overline{B} \subset U$, $\zeta := -1 \in B$ (bzw. $\zeta := 1 \in B$, bzw. $\zeta := 1 \in B$)“ die Voraussetzungen der Cauchyschen Integralformel (bzw. für das dritte Integral der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel mit $n = 1$) erfüllt und es folgt:

$$\oint_\delta \frac{\frac{1}{4}}{(z+1)} dz = 2\pi i \cdot f(-1) = \frac{2\pi i}{4} = \frac{\pi i}{2}$$
$$\oint_\delta \frac{-\frac{1}{4}}{(z-1)} dz = 2\pi i \cdot f(1) = -\frac{2\pi i}{4} = -\frac{\pi i}{2}$$
$$\oint_\delta \frac{\frac{1}{2}}{(z-1)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot f'(1) = 0$$

Insgesamt erhalten wir daher

$$\oint_\delta \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} dz = \frac{\pi i}{2} - \frac{\pi i}{2} = 0$$

Alternativ und kürzer geht es in diesem Teil nicht. Die Partialbruchzerlegung ist hier zwingend erforderlich.

Aufgabe 27

Es sei g stetig in einer Umgebung einer offenen Menge U mit stückweise glattem Rand. Zeigen Sie, dass dann

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

eine reguläre Funktion in U ist. Zeigen Sie, das jedoch f nicht notwendigerweise eine stetige Fortsetzung auf den ∂U hat, die mit g übereinstimmt. Hinweis: Betrachten Sie als $g(z) = \frac{1}{z}$ und als U die Einheitskreisscheibe um 0.

Lösung:

Erinnerung:
Komplexes Parameterintegral: $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ Integrationsweg mit $\mathrm{Sp}(\gamma) \subset \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$, $f : \mathrm{Sp}(\gamma) \times U \to \mathbb{C}$ mit $(\zeta, z) \mapsto f(\zeta, z)$ stetig in $\mathrm{Sp}(\gamma) \times U$. Dann:

$$F : U \to \mathbb{C} \text{ mit } F(z) := \int_\gamma f(\zeta, z) dz \text{ heißt } \textit{komplexes Parameterintegral}$$

Satz: Für komplexe Parameterintegrale gelten die folgenden Aussagen:

(1): F ist stetig in U

(2): (*Differentiation des Parameterintegrals*) $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f(\zeta, \bullet) : U \to \mathbb{C}$ mit $z \mapsto f(\zeta, z)$ holomorph in U $\forall \zeta \in \mathrm{Sp}(\gamma)$. Dann gilt: $F : U \to \mathbb{C}$ holomorph in U und

$$\frac{d}{dz} F(z) = \int_\gamma \frac{\partial}{\partial z} f(\zeta, z) d\zeta \;\forall z \in U$$

(3): (*Integration des Parameterintegrals*) $U \subset \mathbb{C}$, $\alpha : [c,d] \to \mathbb{C}$ Integrationsweg mit $\mathrm{Sp}(\alpha) \subset U$.
Dann existiert das Integral

$$\int_\alpha F(z)dz = \int_\alpha \left(\int_\gamma f(\zeta, z) d\zeta \right) dz$$

und es gilt

$$\int_\alpha \left(\int_\gamma f(\zeta, z) d\zeta \right) dz = \int_\gamma \left(\int_\alpha f(\zeta, z) dz \right) d\zeta$$

Teil 1: z.z. f ist regulär (d.h. holomorph) in U
1. Möglichkeit: (Differentiation des Parameterintegrals)
Betrachte den Integrationsweg ∂U und sei

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Definiere $\varphi : \partial U \times U \to \mathbb{C}$ durch $\varphi(\zeta, z) := \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}$. Offenbar ist φ stetig in $\partial U \times U$, weswegen das komplexe Parameterintegral wohldefiniert ist. Ehe wir nun die Eigenschaft (2) anwenden, werden wir zunächst die Ableitung des Integranden bestimmen. Mithilfe der Quotientenregel (QR) erhalten wir:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(\zeta, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{g(\zeta)}{\zeta - z} \right) \overset{\text{(QR)}}{=} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \quad \forall (\zeta, z) \in \partial U \times U$$

Die Ableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(\zeta, z)$ existiert und ist stetig in $\{\partial U\} \times U$. Aus der Differentiation des Parameterintegrals folgt unmittelbar, dass f regulär, also holomorph, in U ist. Eine Darstellung für die Ableitung von f erhalten wir aus der Definition von f, der Differentiation des Parameterintegrals (DP) in (2) und der Zeile vorher durch

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{d}{dz} f(z) \overset{\text{Def. f}}{=} \frac{d}{dz} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \overset{\text{(DP)}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{g(\zeta)}{\zeta - z} \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \quad \forall z \in U \end{aligned}$$

2. Möglichkeit: (Differentialquotient)
Sei $a \in U$ mit $a \neq z$, dann gilt die folgende Gleichung (die interessanten Schritte befinden sich beim Nachweis dieser Gleichung und werden dem Leser überlassen)

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - a)^2} d\zeta = \frac{z - a}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - a)^2 (\zeta - z)} d\zeta \quad \forall z \in U$$

Der Grenzübergang von $z \to a$ liefert uns 0 für den Ausdruck auf der rechten Seite, womit f in U regulär, also holomorph ist.
Teil 2: Betrachte $U := \mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und $g(z) = \frac{1}{z}$. Dann ist

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{E}} \frac{\frac{1}{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{E}} \frac{1}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta$$

Speziell für den Punkt $1 \in \partial \mathbb{E}$ gilt offenbar

$$g(1) = \frac{1}{1} = 1$$

jedoch ist

$$f(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{E}} \frac{\frac{1}{\zeta}}{\zeta - 1} d\zeta$$

nicht wohldefiniert (da zwar in $\mathbb{C} \backslash \{0, 1\}$ holomorph ist, aber $\partial \mathbb{E} \not\supset \mathbb{C}\{0, 1\}$ gilt), womit g und f auf $\partial \mathbb{E}$ nicht miteinander übereinstimmen. (Beachte: Anstellen von des Punktes 1 kann in diesem Aufgabenteil jeder beliebige Punkt aus $\partial \mathbb{E}$ betrachtet werden. f ist in diesem Fall stets nicht wohldefiniert.)

Aufgabe 28

Welche Werte kann

$$\oint_\gamma \frac{1}{1+z^2}\,dz$$

annehmen, wenn γ alle möglichen Wege von 0 nach 1 durchläuft längs derer der Integrand stetig ist?

Lösung:

Erinnerung:

Residuensatz: $U \subset \mathbb{C}$ offen, β nullhomologer Integrationsweg (d.h. β geschlossener Integrationsweg, $\operatorname{Sp}(\beta) \subset U$ und $\operatorname{int}(\beta) \subset U$), $A \subset U$ diskret in U (d.h. A besitzt keine Häufungspunkte in U) und $A \cap \operatorname{Sp}(\beta) = \emptyset$, $f : U \backslash A \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

(1): $M := A \cap \operatorname{int}(\beta)$ besteht aus endlich vielen Punkten

(2): $\displaystyle\oint_\beta f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{c\in M} \operatorname{ind}_\beta(c) \cdot \operatorname{Res}_c(f)$

Rechenregel für Residuen: $U \subset \mathbb{C}$ offen, $c \in U$, $f, g : U \to \mathbb{C}$ meromorph. Besitzt f im Punkt c eine Nullstelle erster Ordnung und g im Punkt c keine Pol- oder Nullstelle, so gilt:

$$\operatorname{Res}_c\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right) = \frac{g(c)}{f'(c)}$$

Idee (Vorüberlegung): Wähle einen „einfachen“ Integrationsweg α von 0 nach 1, z.B. die Verbindungsstrecke

$$\alpha : [0,1] \to \mathbb{C} \text{ mit } \alpha(t) := t$$

Dann gilt:

$$\gamma = \gamma \oplus (-\alpha) \oplus \alpha = (\gamma \oplus (-a)) \oplus \alpha$$

Die Integration über eine beliebige Kurve γ ist daher gleichbedeutet mit der Integration über eine beliebige geschlossene Kurve $\gamma\oplus(-\alpha)$ und der Integration über die vorgegebene Kurve α. Bemerke: Hierbei bedeutet $\gamma \oplus (-\alpha)$, dass wir zunächst die Kurve γ vorwärts und anschließend die Kurve α rückwärts durchlaufen.

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{A}{(z+1)} + \frac{B}{(z-1)} = \frac{(A+B)z + i(B-A)}{(z+i)(z-i)}$$

Damit erhalten wir die Gleichungen

(I): $A + B = 0$

(II): $B - A = -i$

Lösen wir dieses Gleichungssystem auf, so erhalten wir $A = \frac{i}{2}$, $B = -\frac{i}{2}$ und damit die Darstellung

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{\frac{i}{2}}{(z+i)} + \frac{-\frac{i}{2}}{(z-i)}$$

Achtung: Der Integrationsweg ist nur dann stetig, wenn γ nicht durch die Punkte i und $-i$ läuft, d.h. es muss $\operatorname{Sp}(\gamma) \subset \mathbb{C}\backslash\{-i, i\}$ gelten, da der Integrand $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ in den Punkten i und $-i$ unstetig ist! Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung (PBZ) und unserer Vorüberlegung (Idee) erhalten wir:

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \frac{1}{1+z^2}\,dz &= \oint_\gamma \frac{1}{(z+i)(z-i)}\,dz \overset{\text{(PBZ)}}{=} \frac{i}{2}\oint_\gamma \frac{1}{z+i}\,dz - \frac{i}{2}\oint_\gamma \frac{1}{z-i}\,dz \\ &\overset{\text{Idee}}{=} \underbrace{\frac{i}{2}\oint_{\gamma\oplus(-\alpha)} \frac{1}{z+i}\,dz}_{\text{Residuensatz}} + \underbrace{\frac{i}{2}\oint_\alpha \frac{1}{z+i}\,dz}_{\text{berechnen}} - \underbrace{\frac{i}{2}\oint_{\gamma\oplus(-\alpha)} \frac{1}{z-i}\,dz}_{\text{Residuensatz}} - \underbrace{\frac{i}{2}\oint_\alpha \frac{1}{z-i}\,dz}_{\text{berechnen}}\end{aligned}$$

Wir müssen nun jedes dieser Integrale berechnen. Die Definition des Kurvenintegrals liefert uns:

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2}\oint_\alpha \frac{1}{z+i}\,dz &= \frac{i}{2}\int_0^1 \frac{1}{t+i}\,dt = \frac{i}{2}\int_0^1 \frac{t-i}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt + \frac{i}{4}\int_0^1 \frac{2t}{t^2+1}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\cdot[\arctan(t)]_0^1 + \frac{i}{4}\cdot\left[\log\left|t^2+1\right|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot(\underbrace{\arctan(1)}_{=\frac{\pi}{4}} - \underbrace{\arctan(0)}_{=0}) + \frac{i}{4}\cdot(\log|2| - \underbrace{\log|1|}_{=0}) \\
&= \frac{\pi}{8} + i\cdot\frac{\log|2|}{4} \\
-\frac{i}{2}\oint_\alpha \frac{1}{z-i}\,dz &= -\frac{i}{2}\int_0^1 \frac{1}{t-i}\,dt = -\frac{i}{2}\int_0^1 \frac{t+i}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt - \frac{i}{4}\int_0^1 \frac{2t}{t^2+1}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\cdot[\arctan(t)]_0^1 - \frac{i}{4}\cdot\left[\log\left|t^2+1\right|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot(\underbrace{\arctan(1)}_{=\frac{\pi}{4}} - \underbrace{\arctan(0)}_{=0}) - \frac{i}{4}\cdot(\log|2| - \underbrace{\log|1|}_{=0}) \\
&= \frac{\pi}{8} - i\cdot\frac{\log|2|}{4}
\end{aligned}$$

Für die Berechnung der zwei verbliebenen Integrale werden wir den Residuensatz anwenden. Wir berechnen zunächst die Residuen mit Hilfe der obigen Rechenregel für Residuen. Dazu betrachte $U := \mathbb{C}$ offen, $c := -i \in \mathbb{C}$ (bzw. $c := i \in \mathbb{C}$), $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := z+i$ (bzw. $f(z) := z-i$) meromorph und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $g(z) := 1$ meromorph. Dann besitzt die Funktion $f(z) = z+i$ (bzw. $f(z) = z-i$) im Punkt $-i$ (bzw. i) eine Nullstelle erster Ordnung. Nach der Rechenregel für Residuen folgt daher

$$\mathrm{Res}_{-i}\left(\frac{1}{z+i}\right) = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Res}_{i}\left(\frac{1}{z-i}\right) = \frac{1}{1} = 1$$

Der Residuensatz liefert uns zum einen mit $U := \mathbb{C}$, $\beta := \gamma \oplus (-\alpha)$ geschlossener Integrationsweg erfüllt $\mathrm{Sp}(\gamma \oplus (-\alpha)) \subset \mathbb{C}$ und $\mathrm{int}(\gamma \oplus (-\alpha)) \subset \mathbb{C}$, $A := \{-i\}$ diskret in $\mathbb{C}$, $\{-i\} \cap \mathrm{Sp}(\gamma \oplus (-\alpha)) = \emptyset$, $\frac{1}{z+i} : \mathbb{C}\backslash\{-i\} \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph

$$\frac{i}{2}\oint_{\gamma\oplus(-\alpha)} \frac{1}{z+i}\,dz = \frac{i}{2}\cdot 2\pi i\cdot \mathrm{ind}_{\gamma\oplus(-\alpha)}(-i)\cdot \mathrm{Res}_{-i}\left(\frac{1}{z+i}\right) = -\pi\cdot \mathrm{ind}_{\gamma\oplus(-\alpha)}(-i)$$

und zum anderen mit $U := \mathbb{C}$, $\beta := \gamma \oplus (-\alpha)$ geschlossener Integrationsweg erfüllt $\mathrm{Sp}(\gamma \oplus (-\alpha)) \subset \mathbb{C}$ und $\mathrm{int}(\gamma \oplus (-\alpha)) \subset \mathbb{C}$, $A := \{i\}$ diskret in $\mathbb{C}$, $\{i\} \cap \mathrm{Sp}(\gamma \oplus (-\alpha)) = \emptyset$, $\frac{1}{z-i} : \mathbb{C}\backslash\{i\} \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph

$$-\frac{i}{2}\oint_{\gamma\oplus(-\alpha)} \frac{1}{z-i}\,dz = -\frac{i}{2}\cdot 2\pi i\cdot \mathrm{ind}_{\gamma\oplus(-\alpha)}(i)\cdot \mathrm{Res}_{i}\left(\frac{1}{z-i}\right) = \pi\cdot \mathrm{ind}_{\gamma\oplus(-\alpha)}(i)$$

Hierbei gilt $\mathrm{ind}_{\gamma\oplus(-\alpha)}(-i), \mathrm{ind}_{\gamma\oplus(-\alpha)}(i) \in \mathbb{Z}$. Insgesamt erhalten wir daraus die alle möglichen Werte des Integrals:

$$\oint_\gamma \frac{1}{1+z^2}\,dz = \frac{\pi}{8} + i\cdot\frac{\log|2|}{4} + \frac{\pi}{8} - i\cdot\frac{\log|2|}{4} + \pi\cdot\left(\underbrace{\mathrm{ind}_{\gamma-\alpha}(i)}_{\in\mathbb{Z}} - \underbrace{\mathrm{ind}_{\gamma-\alpha}(-i)}_{\in\mathbb{Z}}\right) = \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$$

Abschlussbemerkung:
1. Die Partialbruchzerlegung (PBZ) ist für die Berechnung nicht zwingend erforderlich.
2. Die letzten beiden Integrale lassen sich anstatt mit dem Residuensatz auch mit dem Cauchyschen Integralsatz und der Cauchyschen Integralformel (nicht die von oben für Kreisscheiben! sondern mit einer allgemeineren Fassung) berechnen. Hierbei sind allerdings für jedes Integral jeweils zwei Fallunterscheidungen durchzuführen. Entweder es liegt kein Pol innerhalb von $\mathrm{Sp}(\gamma \oplus (-\alpha))$, so muss der Cauchysche Integralsatz angewendet werden und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2}\oint_{\gamma\oplus(-\alpha)} \frac{1}{z+i}\,dz &= 0 \\
-\frac{i}{2}\oint_{\gamma\oplus(-\alpha)} \frac{1}{z-i}\,dz &= 0
\end{aligned}$$

oder es liegt ein Pol innerhalb von $\mathrm{Sp}(\gamma \oplus (-\alpha))$, so muss die Cauchysche Integralformel angewendet werden und wir erhalten

$$\frac{i}{2} \oint_{\gamma \oplus (-\alpha)} \frac{1}{z+i}\, dz = \frac{i}{2} \cdot 2\pi i \cdot \underbrace{\mathrm{ind}_{\gamma - \alpha}(-i)}_{=: k \in \mathbb{Z}} = -\pi k \in -\pi\mathbb{Z}$$

$$-\frac{i}{2} \oint_{\gamma \oplus (-\alpha)} \frac{1}{z-i}\, dz = -\frac{i}{2} \cdot 2\pi i \cdot \underbrace{\mathrm{ind}_{\gamma - \alpha}(i)}_{=: l \in \mathbb{Z}} = \pi l \in \pi\mathbb{Z}$$

Hierbei ist die $\mathrm{ind}_{\gamma \oplus (-\alpha)}(-i)$ (bzw. $\mathrm{ind}_{\gamma \oplus (-\alpha)}(i)$) die *Umlaufzahl* (oder auch *Windungszahl* oder *Index* genannt). Dass die Voraussetzungen des Integralsatzes bzw. der Integralformel erfüllt sind, möge man sich leicht überlegen. Insgesamt erhalten wir demnach dieselben Ergebnisse.