Aufgabe 29

Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen holomorph in den Nullpunkt fortsetzbar sind:

(a): $f(z) = \dfrac{z}{1-e^z}$

(b): $f(z) = z^2 \sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$

Lösung:

Erinnerung:

Riemannscher Fortsetzungssatz (Hebbarkeitssatz): $U \subset \mathbb{C}$ offen, $M \subset U$ diskret in U (d.h. M habe keine Häufungspunkte in U) und $f : U\backslash M \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1): f ist zu einer holomorphen Funktion $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$ fortsetzbar

(2): f ist zu einer stetigen Funktion $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$ fortsetzbar

(3): $\forall\, c \in M\ \exists\, V \subset U$ Umgebung von c: f ist auf $V\backslash\{c\}$ beschränkt

(4): $\forall\, c \in M\ \exists\, w \in \mathbb{C}:\ \lim\limits_{\substack{z\to c\\ z\in U\backslash M}} f(z) = w$

Identitätssatz: $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1): $f(z) = g(z) \quad \forall\, z \in G$

(2): Die Menge $\{z \in G \mid f(z) = g(z)\}$ besitzt einen Häufungspunkt in G

(3): $\exists\, c \in G\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0 :\ f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$

Wir werden für beide Aufgabenteile verschiedene Lösungsmethoden behandeln. In der Tat gibt es dermaßen viele Möglichkeiten die Fortsetzung zu zeigen oder zu widerlegen (z.B. Ordnung einer Funktion, Laurentreihe, u.s.w.), so dass wir hier lediglich eine geeignete Auswahl an Lösungsmöglichkeiten behandeln.

zu (a): In Bezug auf den Riemannschen Hebbarkeitssatz seien $U := \mathbb{C}$ offen, $M := \{0\} \subset U$ (M ist diskret in U) und $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \frac{z}{1-e^z}$ holomorph in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

• Mit (2): Definiere die Funktion

$$\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ mit } \tilde{f}(z) := \begin{cases} \frac{z}{1-e^z} & , z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \\ -1 & , z = 0 \end{cases}$$

Zunächst einmal ist $\tilde{f}$ (wegen $\tilde{f}(z) = f(z)\ \forall\, z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$) eine Fortsetzung der Funktion f. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ eine beliebige Folge mit $z_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Dann ist $\tilde{f}$ nach dem Folgenkriterium stetig auf ganz $\mathbb{C}$, denn nach der Regel von L'Hospital (LHR) gilt

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{(f_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{1-e^{z_n}} \overset{\text{(LHR)}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{-e^{z_n}} = -1 = \tilde{f}(0)$$

Demnach ist $\tilde{f}$ insgesamt eine stetige Fortsetzung von f auf $\mathbb{C}$.

• Mit (3): Sei $c := 0 \in M$ und $V := B_1(0) \subset \mathbb{C}$ eine Umgebung von $c = 0$. Dann ist f in der punktierten Umgebung $V\backslash\{0\} = B_1(0)\backslash\{0\} =: \dot{B}_1(0)$ beschränkt, denn nach Aufgabe 20 (Blatt 05) gilt

$$|f(z)| = \left|\frac{z}{1-e^z}\right| = \frac{|z|}{|1-e^z|} \leqslant \frac{4\,|z|}{|z|} = 4 \quad \forall\, z \in \dot{B}_1(0)$$

• Mit (4): Sei $c := 0 \in M$. Wegen $\lim_{z\to 0} z = 0$ und $\lim_{z\to 0} 1 - e^z = 0$ erhalten wir nach der Regel von L'Hospital (LHR)

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}}} f(z) = \lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}}} \frac{z}{1-e^z} \overset{\text{(LHR)}}{=} \lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}}} \frac{1}{-e^z} = -1 =: w \in \mathbb{C}$$

In jedem dieser Fälle erhalten wir aus dem Riemannschen Fortsetzungssatz (Hebbarkeitssatz), dass f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph fortsetzbar ist. Demzufolge handelt es sich bei dem Punkt 0 um eine (außerwesentliche) hebbare Singularität.
zu (b): In Bezug auf den Riemannschen Hebbarkeitssatz seien $U := \mathbb{C}$ offen, $M := \{0\} \subset U$ (M ist diskret in U) und $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ holomorph in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.
• Mit (2): Definiere die Funktion

$$\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ mit } \tilde{f}(z) := \begin{cases} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) & , z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \\ w & , z = 0 \end{cases}$$

mit $w \in \mathbb{C}$. Zunächst einmal ist $\tilde{f}$ (wegen $\tilde{f}(z) = f(z)\ \forall\, z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$) eine Fortsetzung der Funktion f. Um die Stetigkeit von $\tilde{f}$ auf ganz $\mathbb{C}$ zu gewährleisten, muss der Wert $w \in \mathbb{C}$ eindeutig sein. Dass dies bei der Funktion $\tilde{f}$ jedoch nicht der Fall sein kann, werden wir mit Hilfe des Folgenkriteriums recht schnell einsehen. Dazu betrachten wir zunächst die Folge $z_n := \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Offenbar gilt $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $z_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Für den Funktionswert an der Stelle 0 gilt (wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$)

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{f}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0 =: w \in \mathbb{C}$$

Als nächstes betrachten wir die Folge $z_n := \frac{i}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Offenbar gilt auch hier $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $z_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Für den Funktionswert an der Stelle 0 gilt allerdings

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \tilde{f}\left(\frac{i}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \sin\left(\frac{1}{\frac{i}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n^2} \cdot \sin(-in) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2i}\left(e^{i\cdot(-in)} - e^{-i\cdot(-in)}\right) \\ &= (-i) \cdot \Big(\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n}}{2n^2}}_{=0} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n}}{2n^2}}_{=+\infty} \Big) = +i\infty\end{aligned}$$

Damit kann es kein $w \in \mathbb{C}$ geben, so dass $\tilde{f}$ auf ganz $\mathbb{C}$ stetig ist. Demnach ist f insbesondere nicht auf ganz $\mathbb{C}$ stetig fortsetzbar. In diesem Fall erhalten wir aus dem Riemannschen Fortsetzungssatz (Hebbarkeitssatz), dass f nicht auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph fortgesetzt werden kann. Demzufolge handelt es sich bei dem Punkt 0 um eine Polstelle (bzw. einen Pol), der ebenso zu der Klasse der außerwesentlichen Singularitäten gehört.
• Mit Identitätssatz: Wir betrachten das Gebiet $G := \mathbb{C}$ und die auf diesem Gebiet holomorphe Funktion $g(z) = 0$. Angenommen $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ lässt sich auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph fortsetzen. Wir betrachten die Folge $z_n = \frac{1}{n\pi}$ für $n \in \mathbb{N}$. Diese Folge konvergiert gegen 0 (d.h. 0 ist ein Häufungspunkt und liegt in $G = \mathbb{C}$). Weiter gilt

$$f(z_n) = z_n^2 \sin\left(\frac{1}{z_n}\right) = \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \sin(n\pi) = 0 = g(z_n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Damit stimmt die Funktion $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ auf der Menge aller Folgenglieder der Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Nullfunktion $g(z) = 0$ überein, d.h. es ist

$$\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \{z \in G = \mathbb{C} \mid f(z) = g(z)\}$$

Da die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Teilmenge eine Häufungspunkt in $G = \mathbb{C}$ besitzt, weist auch die Koinzidenzmenge $\{z \in G = \mathbb{C} \mid f(z) = g(z)\}$ diesen Häufungspunkt 0 in $G = \mathbb{C}$ auf. Demzufolge muss nach dem Identitätssatz $f(z) = g(z)$ für jedes $z \in G$ gelten, d.h. f stimmt auf $\mathbb{C}$ mit der Nullfunktion überein, was natürlich nicht stimmt. Daraus folgt der Widerspruch.
• Mit Laurentreihe: Wegen

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

ist die Laurententwicklung von f um 0 gegeben durch

$$f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n-1}}$$

Hierbei sieht man sofort, dass im Hauptteil der Laurentreihe unendlich viele Koeffizienten ungleich 0 sind (d.h. $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$). Demzufolge besitzt f in 0 eine wesentliche Singularität.

Aufgabe 30

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und L eine Gerade in $\mathbb{C}$. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und auf $U \backslash L$ holomorph. Zeigen Sie, dass f auf ganz U holomorph ist mit Hilfe des Satzes von Morera.

Lösung:

Erinnerung:

Satz: $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1): f holomorph in U

(2): Für jede kompakte Dreiecksfläche $\triangle \subset U$ gilt:

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\, dz = 0$$

Die Aussage (1) $\Rightarrow$ (2) heißt *Satz von Goursat* und die Aussage (2) $\Rightarrow$ (1) heißt *Satz von Morera.*

Cauchyscher Integralsatz (Stetigkeit-am-Rand-Version): γ einfach geschlossener Integrationsweg, $f : \overline{\operatorname{int}(\gamma)} \to \mathbb{C}$ stetig und $f : \operatorname{int}(\gamma) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Hilfssatz: $U \subset \mathbb{C}$ offen, $\triangle \subset U$ kompakte Dreiecksfläche, $z_0 \in \triangle$, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig in U und holomorph in $U \backslash \{z_0\}$. Dann gilt:

$$\int_{\partial\triangle} f(z) dz = 0$$

Wir werden für den Beweis in Aufgabe 30 zeigen, dass die obige Aussage (2) erfüllt ist. Dazu sei $\triangle \subset U$, wobei $\triangle$ ein beliebiges kompaktes (also abgeschlossenes) Dreieck bezeichne. Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Fall: ($\partial\triangle \cap L = \emptyset$)

In diesem Fall gilt $\partial\triangle \subset U \backslash L$. Da $f : U \backslash L \to \mathbb{C}$ holomorph und $\partial\triangle$ ein geschlossener Integrationsweg (mit $\partial\triangle = \operatorname{Sp}(\triangle) \subset U$ und $\operatorname{int}(\triangle) \subset U$) ist, folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz (Standardversion oder der für Dreieckswege (Satz von Goursat))

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\, dz = 0$$

2. Fall: (Eine Ecke oder eine Kante von $\partial\triangle$ liegt auf L)

In diesem Fall gelten $\triangle = \overline{\operatorname{int}(\triangle)} \subset U$ und $\operatorname{int}(\triangle) \subset U \backslash L$. Da $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, $f : U \backslash L \to \mathbb{C}$ holomorph und $\partial\triangle$ ein einfach geschlossener Integrationsweg (d.h. Jordankurve) ist, folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz (Stetigkeit-am-Rand-Version)

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\, dz = 0$$

3. Fall: ($\partial\triangle$ und L besitzen zwei Schnittpunkte)

Wir bezeichnen die zwei Schnittpunkte von $\partial\triangle$ und L mit x und y. Betrachten wir die folgenden zwei (jeweils zusammengesetzen und geschlossenen) Integrationswege (Verbindungsstrecken)

$$\alpha := [a,b] + [b,y] + [y,x] + [x,a]$$
$$\beta := [c,x] + [x,y] + [y,c]$$

so gilt wegen dem Vorzeichenwechsel bei Wegumkehr

$$\int_{[x,y]} f(z)\,dz = -\int_{[y,x]} f(z)\,dz$$

die Gleichung

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = \int_{\alpha} f(z)\,dz + \int_{\beta} f(z)\,dz$$

Die Kurven α und β erfüllen das Kriterium aus dem 2. Fall und demnach gilt mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes (Stetigkeit-am-Rand-Version)

$$\int_{\alpha} f(z)\,dz = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\beta} f(z)\,dz = 0$$

Insgesamt erhalten wir auch in diesem Fall das Resultat

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = \int_{\alpha} f(z)\,dz + \int_{\beta} f(z)\,dz = 0$$

Damit haben wir die obige Aussage (2) gezeigt und aus dem Satz von Morera folgt die Holomorphie von $f : U \to \mathbb{C}$ auf ganz U.
Ergänzung: Der zweite Fall lässt sich auch ohne die Kenntnis des Cauchyschen Integralsatzes (Stetigkeit-am-Rand-Version) beweisen. Allerdings ist dieser Beweis des zweiten Falls anschließend sehr sehr aufwendig. Der Vollständigkeit halber wollen wir diesen jedoch teilweise ergänzen. Dazu betrachten wir im zweiten Fall zwei Unterfälle:
2.1 Unterfall: (Eine Ecke von $\partial\triangle$ liegt auf L)
Diese Aussage folgt unmittelbar aus dem obigen Hilfssatz. Einen Beweis zu dem Hilfssatz findet sich in dem Buch *Funktionentheorie* von *Wolfgang Fischer* und *Ingo Lieb* (siehe Beweis zu Satz 1.2 in Kapitel III).
2.2 Unterfall: (Eine Kante von $\partial\triangle$ liegt auf L)
Diesen Fall zeigen wir in vier Schritten:
(1): Da f eine auf dem Kompaktum $\overline{\text{int}(\gamma)}$ stetige Funktion ist, folgt:

(a): f ist gleichmäßig stetig in $\overline{\text{int}(\gamma)}$, d.h.

$$\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\delta > 0\;\forall\,x, y \in \overline{\text{int}(\gamma)} \text{ mit } |x-y| < \delta : \; |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

(b): f nimmt in $\overline{\text{int}(\gamma)}$ sein Maximum und Minimum an, d.h.

$$\exists\,C_1, C_2 \in \mathbb{R}\;\forall\,z \in \overline{\text{int}(\gamma)} : \; |f(z)| \leqslant C_1 \text{ und } |f(z)| \geqslant C_2$$

(2): Es bezeichne $\gamma := \partial\triangle$ diejenige geschlossene Kurve in U, die den Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten z_1, z_2, z_3 genau einmal umläuft. Dabei befinden sich die Eckpunkte z_1 und z_3 auf der Geraden L. Weiter bezeichne $\gamma_\varepsilon := \partial\triangle_\varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ diejenige geschlossene Kurve in U, die den Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $z_{\varepsilon,1}, z_2, z_{\varepsilon,3}$ in derselben Richtung wie γ genau einmal umläuft. Dabei liegen die Punkte $z_{\varepsilon,1}$ (bzw. $z_{\varepsilon,3}$) auf den Verbindungsgeraden von z_1 und z_2 (bzw. z_2 und z_3) und haben jeweils den Abstand ε von z_1 (bzw. z_3). Damit ist $\overline{\text{int}(\gamma_\varepsilon)}$ insbesondere sowohl in $U\backslash L$ als auch in $\overline{\text{int}(\gamma)}$ enthalten. Eine genauere Angabe der Kurven ist an dieser Stelle nicht erforderlich. Wir untersuchen nun den Grenzübergang für $\varepsilon \to 0$.
(3): Wegen der Dreiecksungleichung, einer Integralabschätzung, der gleichmäßigen Stetigkeit von f in

$\overline{\operatorname{int}(\gamma)}$ (siehe (a)) und der Beschränktheit von f in $\overline{\operatorname{int}(\gamma)}$ (siehe (b)) gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_\gamma f(z)dz - \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz\right| \\
=&\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\sum_{i=1}^{3}\int_{\gamma^{(i)}} f(z)dz - \sum_{i=1}^{3}\int_{\gamma_\varepsilon^{(i)}} f(z)dz\right| \\
=&\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\sum_{i=1}^{3}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma^{(i)}(t))\cdot\gamma^{(i)\prime}(t)dt - \sum_{i=1}^{3}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma_\varepsilon^{(i)}(t))\cdot\gamma_\varepsilon^{(i)\prime}(t)dt\right| \\
=&\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\sum_{i=1}^{3}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma^{(i)}(t))\cdot\gamma^{(i)\prime}(t) - f(\gamma_\varepsilon^{(i)}(t))\cdot\gamma_\varepsilon^{(i)\prime}(t)dt\right| \\
=&\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\sum_{i=1}^{3}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma^{(i)}(t))\cdot\gamma^{(i)\prime}(t) - f(\gamma_\varepsilon^{(i)}(t))\cdot\gamma^{(i)\prime}(t) + f(\gamma_\varepsilon^{(i)}(t))\cdot\gamma^{(i)\prime}(t) - f(\gamma_\varepsilon^{(i)}(t))\cdot\gamma_\varepsilon^{(i)\prime}(t)dt\right| \\
\leqslant&\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{3}\int_{a_i}^{a_{i+1}} \left|f(\gamma^{(i)}(t)) - f(\gamma_\varepsilon^{(i)}(t))\right|\cdot\left|\gamma^{(i)\prime}(t)\right| + \left|f(\gamma_\varepsilon^{(i)}(t))\right|\cdot\left|\gamma^{(i)\prime}(t) - \gamma_\varepsilon^{(i)\prime}(t)\right|dt \\
\leqslant&\lim_{\varepsilon\to 0}\max_{i\in\{1,2,3\}}\max_{t\in[a_i,a_{i+1}]}\underbrace{\left|f(\gamma^{(i)}(t)) - f(\gamma_\varepsilon^{(i)}(t))\right|}_{\stackrel{\varepsilon\to 0}{\to}0}\cdot\underbrace{\left|\gamma^{(i)\prime}(t)\right|}_{\leqslant C} + \underbrace{\left|f(\gamma_\varepsilon^{(i)}(t))\right|}_{\leqslant C_1}\cdot\underbrace{\left|\gamma^{(i)\prime}(t) - \gamma_\varepsilon^{(i)\prime}(t)\right|}_{\stackrel{\varepsilon\to 0}{\to}0} \\
=&0
\end{aligned}$$

(4): Wegen $\overline{\operatorname{int}(\gamma_\varepsilon)}\subset U\backslash L\;\forall\,\varepsilon>0$ und f holomorph in $U\backslash L$ folgt aus (2) und dem Cauchyschen Integralsatz (CIS) (Standardversion oder der über Dreieckswege (Satz von Goursat)) die Behauptung

$$\int_\gamma f(z)dz \stackrel{(2)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz \stackrel{\text{(CIS)}}{=} 0$$

Aufgabe 31

Man entwickle die folgenden Funktionen in eine Potenzreihe

(1): $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$ (Entwicklungspunkt $z_0 = 0$)
(2): $f(z) = e^{z}$ (Entwicklungspunkt $z_0 = \pi i$)
(3): $f(z) = (z-i)^{-3}$ (Entwicklungspunkt $z_0 = -i$)

Lösung:

Potenzreihenentwicklungssatz: $U\subset\mathbb{C}$ offen, $f:U\to\mathbb{C}$ holomorph. Weiter seien $c\in\mathbb{C}$ und $r\in]0,+\infty[$ mit $B_r(c)\subset U$. Dann lässt sich f lokal (d.h. auf der offenen Kreisscheibe $B_r(c)$) durch eine Potenzreihe darstellen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n \quad \forall\, z\in B_r(c),\text{ wobei } a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_r(c)}\frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}dz,\; n\in\mathbb{N}_0$$

zu (1): Betrachte $U := \mathring{\mathbb{E}}\subset\mathbb{C}$ offen, $f:\mathring{\mathbb{E}}\to\mathbb{C}$ mit $f(z) := e^{\frac{z}{1-z}}$ und $c := 0\in\mathring{\mathbb{E}}$. Wir zeigen zunächst, dass f holomorph auf $\mathring{\mathbb{E}}$ ist. Die ersten fünf Ableitungen von f sind für $z \in \mathring{\mathbb{E}}$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(z) &= e^{\frac{z}{1-z}} \\
f^{(1)}(z) &= \frac{1}{(1-z)^2} \cdot f(z) \\
f^{(2)}(z) &= \frac{3-2z}{(1-z)^4} \cdot f(z) \\
f^{(3)}(z) &= \frac{13-18z+6z^2}{(1-z)^6} \cdot f(z) \\
f^{(4)}(z) &= \frac{73-156z+108z^2-24z^3}{(1-z)^8} \cdot f(z) \\
f^{(5)}(z) &= \frac{4051-15030z+21900z^2-15600z^3+5400z^4-720z^5}{(1-z)^{10}} \cdot f(z)
\end{aligned}$$

Leider haben wir damit noch keine allgemeine Darstellung der n-ten Ableitung von f, die wir bekanntlich später für die Koeffizienten a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ benötigen. Allerdings erhalten wir (trotz der konfusen Polynome im Zähler) mit einem scharfen Blick auf die Ableitungen gerichtet eine Vermutung darüber, wie die allgemeine Darstellung der n-ten Ableitung von f aussehen könnte. Daher leiten wir uns nun eine Rekursionsformel für die n-te Ableitung der Funktion f her.
Rekursionsformel: Wir definieren rekursiv die folgenden komplexen Polynome

$$\begin{aligned}
P_0(z) &:= 1 \\
P_n(z) &:= P'_{n-1}(z) \cdot (1-z)^2 + P_{n-1}(z) \cdot (1+2(n-1)(1-z)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Nun zeigen wir mit Hilfe eines Induktionsbeweises die folgende Zwischenbehauptung:

$$f^{(n)}(z) = \frac{P_n(z)}{(1-z)^{2n}} \cdot f(z) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \qquad \text{Induktionsvoraussetzung (IV)}$$

Induktionsanfang (IA): $n = 0$ und $n = 1$

$$\begin{aligned}
n = 0 : f^{(0)}(z) &= \frac{P_0(z)}{(1-z)^{2\cdot 0}} \cdot f(z) = f(z) \\
n = 1 : f^{(1)}(z) &= \frac{P_1(z)}{(1-z)^{2\cdot 1}} \cdot f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} f(z)
\end{aligned}$$

Induktionsschluss (IS): $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(z) &= \frac{d}{dz} f^{(n)}(z) \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{d}{dz}\left[\frac{P_n(z)}{(1-z)^{2n}} \cdot f(z)\right] \\
&\overset{\text{(QR)}}{=} \frac{\left[\frac{d}{dz} P_n(z) \cdot f(z)\right] \cdot (1-z)^{2n} - \left[\frac{d}{dz}(1-z)^{2n}\right] \cdot P_n(z) \cdot f(z)}{(1-z)^{4n}} \\
&\overset{\text{(PR)}}{=} \frac{[P'_n(z) \cdot f(z) + P_n(z) \cdot f'(z)] \cdot (1-z)^{2n} - (-2n(1-z)^{2n-1}) \cdot P_n(z) \cdot f(z)}{(1-z)^{4n}} \\
&\overset{\text{(ER)}}{=} \frac{P'_n(z) + P_n(z) \cdot (1-z)^{-2} + 2n(1-z)^{-1} P_n(z)}{(1-z)^{2n}} \cdot f(z) \\
&\overset{\text{(ER)}}{=} \frac{P'_n(z) \cdot (1-z)^2 + P_n(z) \cdot (1+2n(1-z))}{(1-z)^{2(n+1)}} \cdot f(z) \\
&\overset{\text{(DP)}}{=} \frac{P_{n+1}(z)}{(1-z)^{2(n+1)}} \cdot f(z)
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Quotientenregel (QR), die Produktregel (PR), zwei Erweiterungen (ER) (mit $\cdot\frac{(1-z)^{-2n}}{(1-z)^{-2n}}$ bzw. $\cdot\frac{(1-z)^2}{(1-z)^2}$) und die Definition von $P_n(z)$ (DP) angewendet. Man beachte, dass bei der ersten

Erweiterung der Induktionsanfang (IA) für $n = 1$ mit eingegangen ist.
Somit haben wir mit Hilfe der rekursiv definierten komplexen Polynome eine Darstellung für die n-te Ableitung von f gefunden. Insbesondere ist f damit holomorph auf $\mathring{\mathbb{E}}$, womit die Voraussetzungen des Potenzreihenentwicklungssatzes erfüllt sind. Wähle nun $0 < r < 1$ beliebig aber fest, dann gilt $B_r(0) \subset \mathring{\mathbb{E}}$ und nach dem Potenzreihenentwicklungssatz lässt sich f lokal (d.h. auf der offenen Kreisscheibe $B_r(0)$) durch eine Potenzreihe darstellen. Dazu berechnen wir nun die Koeffizienten a_n der zu f zugehörigen Potenzreihe entsprechend des Potenzreihenentwicklungssatzes. Die Koeffizienten a_n (mit $n \in \mathbb{N}_0$) sind (wegen $f(0) = e^0 = 1$) gegeben durch

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{P_n(0)}{n! \cdot (1-0)^{2n}} \cdot f(0) = \frac{P_n(0)}{n!} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$$

Die ersten sechs Koeffizienten lauten $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{13}{6}$, $a_4 = \frac{73}{24}$ und $a_5 = \frac{167}{40}$. Wir erhalten daraus die Potenzreihe von $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$ um den Entwicklungspunkt 0

$$e^{\frac{z}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(0)}{n!} \cdot z^n = 1 + z + \frac{3}{2}z^2 + \frac{13}{6}z^3 + \frac{73}{24}z^4 + \frac{167}{40}z^5 + \cdots \quad \forall\, z \in B_r(0)$$

zu (2): Betrachte $U := \mathbb{C}$ offen, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := e^z$ und $c := \pi i \in \mathbb{C}$. Offenbar ist f nach Aufgabe 9(b) holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. Die n-te Ableitung von f, die wir wiederum später für die Koeffizienten a_n ($n \in \mathbb{N}_0$) benötigen, ist gegeben durch

$$f^{(n)}(z) = e^z \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \qquad \text{Induktionsvoraussetzung (IV)}$$

Induktionsanfang (IA): $n = 0$

$$f^{(0)}(z) = e^z$$

Induktionsschluss (IS): $n \to n+1$

$$f^{(n+1)}(z) = \frac{d}{dz} f^n(z) \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{d}{dz} e^z = e^z$$

Insbesondere ist f damit holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. Wähle nun $0 < r < +\infty$ beliebig aber fest, dann ist $B_r(\pi i) \subset \mathbb{C}$ und nach dem Potenzreihenentwicklungssatz lässt sich f lokal (d.h. auf der offenen Kreisscheibe $B_r(\pi i)$) durch eine Potenzreihe darstellen. Dazu berechnen wir nun erneut die Koeffizienten der zu f zugehörigen Potenzreihe entsprechend des Potenzreihenentwicklungssatzes. Wegen

$$f^{(n)}(\pi i) = e^{\pi i} = \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + i \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} = -1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$$

sind die Koeffizienten a_n ($n \in \mathbb{N}_0$) gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(\pi i) = -\frac{1}{n!} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$$

Wir erhalten daraus die Potenzreihe von e^z um den Entwicklungspunkt πi

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{n!}(z - \pi i)^n = -(z-\pi i)^0 - (z-\pi i)^1 - \frac{1}{2}(z-\pi i)^2 - \frac{1}{6}(z-\pi i)^3 - \cdots \quad \forall\, z \in B_r(\pi i)$$

zu (3): Betrachte $U := \mathbb{C}\backslash\{i\}$ offen, $f : \mathbb{C}\backslash\{i\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = (z-i)^{-3}$ und $c := -i \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$. Offenbar ist f holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{i\}$. Die n-te Ableitung von f, die wir wiederum später für die Koeffizienten a_n ($n \in \mathbb{N}_0$) benötigen, ist gegeben durch

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n \cdot \frac{(n+2)!}{2} \cdot (z-i)^{-(n+3)} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \qquad \text{Induktionsvoraussetzung (IV)}$$

Induktionsanfang (IA): $n = 0$

$$f^{(0)}(z) = (-1)^0 \cdot \frac{(0+2)!}{2} \cdot (z-i)^{-(0+3)} = (z-i)^{-3}$$

Induktionsschluss (IS): $n \to n+1$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(z) &= \frac{d}{dz} f^n(z) \overset{(IV)}{=} \frac{d}{dz}\left[(-1)^n \cdot \frac{(n+2)!}{2} \cdot (z-i)^{-(n+3)}\right] \\ &= (-1)^n \cdot \frac{(n+2)!}{2} \cdot (-1) \cdot (n+3) \cdot (z-i)^{-(n+4)} \\ &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{((n+1)+2)!}{2} \cdot (z-i)^{-((n+1)+3)} \end{aligned}$$

Insbesondere ist f damit holomorph auf ganz $\mathbb{C}\backslash\{i\}$. Wähle nun $0 < r < 2$ beliebig aber fest, dann ist $B_r(-i) \subset \mathbb{C}\backslash\{i\}$ und nach dem Potenzreihenentwicklungssatz lässt sich f lokal (d.h. auf der offenen Kreisscheibe $B_r(-i)$) durch eine Potenzreihe darstellen. Dazu berechnen wir nun erneut die Koeffizienten der zu f zugehörigen Potenzreihe entsprechend des Potenzreihenentwicklungssatzes. Die Koeffizienten a_n (mit $n \in \mathbb{N}_0$) sind gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(-i) = (-1)^n \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot (-2i)^{-(n+3)} = \begin{cases} -\frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+4}} \cdot i & , n \in 4\mathbb{N}_0 \\ -\frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+4}} \cdot 1 & , n \in 4\mathbb{N}_0 + 1 \\ -\frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+4}} \cdot (-i) & , n \in 4\mathbb{N}_0 + 2 \\ -\frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+4}} \cdot (-1) & , n \in 4\mathbb{N}_0 + 3 \end{cases}$$

Die ersten sechs Koeffizienten lauten $a_0 = -\frac{1}{8}i$, $a_1 = -\frac{3}{16}$, $a_2 = \frac{3}{16}i$, $a_3 = \frac{5}{32}$, $a_4 = -\frac{15}{128}$ und $a_5 = -\frac{21}{256}$. Wir erhalten daraus die Potenzreihe von $(z-i)^{-3}$ um den Entwicklungspunkt $-i$

$$\begin{aligned} (z-i)^{-3} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot (-2i)^{-(n+3)} \cdot (z+i)^n \\ &= -\frac{1}{8}i(z+i)^0 - \frac{3}{16}(z+i)^1 + \frac{3}{16}i(z+i)^2 + \frac{5}{32}(z+i)^3 - \frac{15}{128}i(z+i)^4 - \dots \quad \forall\, z \in B_r(-i) \end{aligned}$$

Ergänzungsaufgabe:

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f : \mathbb{C} \supset B_r(z_0)\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter gelte

$$\exists\, C > 0 \ \wedge\ \exists\, \varepsilon > 0 : \ |f(z)| \leqslant C\,|z - z_0|^{-\varepsilon} \quad \forall\, z \in B_r(z_0)\backslash\{z_0\}$$

Man zeige, dass f in den Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann.

Lösung:

Erinnerung:

Potenzreihenentwicklungssatz: $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter seien $c \in \mathbb{C}$ und $r \in]0, +\infty[$ mit $B_r(c) \subset U$. Dann lässt sich f lokal (d.h. auf der offenen Kreisscheibe $B_r(c)$) durch eine Potenzreihe darstellen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad \forall\, z \in B_r(c), \text{ wobei } a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(c)} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} dz,\ n \in \mathbb{N}_0$$

Die Aussage des Satzes in Aufgabe 31 stimmt nicht! Gegenbeispiel: $f(z) = \frac{1}{z}$, $z_0 = 0$, $f : \mathbb{C}^\bullet = \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph. Weiter gilt:

$$\exists\, C = 1 > 0 \ \wedge\ \exists\, \varepsilon = 1 > 0 : \ \left|\frac{1}{z}\right| = |f(z)| \leqslant C\,|z - z_0|^{-\varepsilon} = \frac{1}{|z|} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}^\bullet$$

f ist aber in $z_0 = 0$ nicht holomorph fortsetzbar.
Die folgende Aussage gilt jedoch: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f : \mathbb{C} \supset B_r(z_0)\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter gelte

$$\exists\, C > 0 \ \wedge\ \exists\, \varepsilon \in]-\infty, 1[: \ |f(z)| \leqslant C\,|z - z_0|^{-\varepsilon} \quad \forall\, z \in B_r(z_0)\backslash\{z_0\}$$

Dann gilt, dass f in den Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann.
Beweis: Wir unterscheiden hierbei zwei Fälle.
1. Fall: ($\varepsilon \in]-\infty, 0[$). In diesem Fall werden wir den Riemannschen Hebbarkeitssatz anwenden. Betrachte $U := B_r(z_0) \subset \mathbb{C}$ offen, $M := \{z_0\} \subset U$ (M ist diskret in U) und $f : B_r(z_0)\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Aus der Fallbedingung $\varepsilon \in] - \infty, 0[$ und der vorausgesetzen Abschätzung folgt direkt

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in B_r(z_0)\backslash\{z_0\}}} f(z) = 0$$

Damit ist die Eigenschaft (4) des Riemannschen Hebbarkeitssatzes mit $c := z_0$ und $w := 0$ nachgewiesen. Folglich ist f auf $B_r(z_0)$ holomorph fortsetzbar.
2. Fall: ($\varepsilon \in [0, 1[$). Wir definieren die Funktion

$$g : B_r(z_0) \to \mathbb{C} \text{ mit } g(z) := \begin{cases} f(z)(z - z_0) & , z \neq z_0 \\ 0 & , z = z_0 \end{cases}$$

Die Funktion g ist auf $B_r(z_0)\backslash\{z_0\}$ holomorph. Weiter gilt wegen der vorausgesetzen Abschätzung

$$|g(z)| = |z - z_0| \cdot |f(z)| \leqslant C\,|z - z_0|^{1-\varepsilon} \quad \forall\, z \in B_r(z_0)\backslash\{z_0\}$$

und der Fallbedingung $1 - \varepsilon > 0$

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in B_r(z_0)\backslash\{z_0\}}} g(z) = 0$$

Damit erfüllt die Funktion g die Eigenschaft (4) des Riemannschen Hebbarkeitssatzes mit $c := z_0$ und $w := 0$. Folglich ist g auf $B_r(z_0)$ holomorph fortsetzbar. Nach dem Potenzreihenentwicklungssatz lässt sich g nun lokal (d.h. auf der offenen Kreisscheibe $B_r(z_0)$) durch eine Potenzreihe darstellen

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall\, z \in B_r(z_0), \text{ wobei } a_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}, \, n \in \mathbb{N}_0$$

Da $g(z_0) = 0$ ist, folgt $a_0 = 0$. Damit ist die Funktion

$$\frac{g(z)}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (z - z_0)^n$$

holomorph auf $B_r(z_0)$ und stimmt mit auf $B_r(z_0)\backslash\{z_0\}$ mit f überein, womit sie eine holomorphe Fortsetzung von f ist.