Aufgabe 32

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen und bestimmen Sie ihr Konvergenzverhalten am Rande des Konvergenzkreises:

$$(1): \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

$$(2): \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

$$(3): \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

Hinweis: Benutze für (2)

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = b_{N+1}\left(\sum_{k=1}^{N} a_k\right) + \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)(b_n - b_{n+1})$$

Lösung:

Erinnerung:

Weierstraßsches Majorantenkriterium (für Funktionenreihen): $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergente Reihe mit $a_n \in \mathbb{R}_+$ $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$, $U \subset \mathbb{C}$, $f_n : U \longrightarrow \mathbb{C}$ Funktionen mit $\|f_n\|_\infty := \sup_{z\in U} |f_n(z)| \leqslant a_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ ist gleichmäßig konvergent auf } U$$

zu (1): *(geometrische Reihe)*

Behauptung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \text{ ist } \begin{cases} \text{konvergent} & , |z| < 1 \\ \text{divergent} & , |z| \geqslant 1 \end{cases}$$

Beweis: Der Konvergenzradius r lässt sich entweder mit der Formel von Cauchy-Hadamard

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{1}} = 1$$

oder mit der Quotientenformel

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1}\right| = 1$$

berechnen. Beide Methoden liefern uns den Konvergnezradius $r = 1$. Damit konvergiert die geometrische Reihe für jedes z aus dem Inneren der offenen (Einheits-)Kreisscheibe $B_1(0) = \mathring{\mathbb{E}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ absolut und divergiert für jedes z aus dem Äußeren dieser Kreisscheibe. Es bleibt das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzkreises $B_1(0)$ zu untersuchen.

• 1. Möglichkeit: Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, also $z \in \partial B_1(0)$. Dann gilt:

$$(|z|^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ keine Nullfolge} \implies (z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ keine Nullfolge} \implies \sum_{n=1}^{\infty} z^n \text{ divergent}$$

Damit ist die Reihe auf dem gesamten Rand $\partial B_1(0)$ divergent.

• 2. Möglichkeit: (Polarkoordinaten). Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, also $z \in \partial B_1(0)$. Dann lässt sich z in Polarform eindeutig darstellen durch $z = e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in]-\pi, \pi]$. Es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{i\varphi}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\varphi n) + i\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\varphi n)$$

Die Reihe auf der linken Seite dieser Gleichung konvergiert, falls jede der reellen (!!!) Reihen auf der rechten Seite konvergiert. Die Reihe auf der linken Seite dieser Gleichung divergiert, falls mindestens eine der reellen Reihen auf der rechten Seite divergiert. Es gilt nun:

$$\varphi \in]-\pi,\pi]\backslash\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\} \implies (\cos(\varphi n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ keine Nullfolge} \implies \sum_{n=1}^{\infty}\cos(\varphi n) \text{ divergiert}$$

$$\varphi \in]-\pi,\pi]\backslash\{0,\pi\} \implies (\sin(\varphi n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ keine Nullfolge} \implies \sum_{n=1}^{\infty}\sin(\varphi n) \text{ divergiert}$$

Damit gilt für jedes Argument $\varphi \in]-\pi,\pi]$, dass mindestens eine der Reihen auf der rechten Seite (und folglich auch die Reihe auf der linken Seite) divergiert. Damit ist die Reihe auf dem gesamten Rand $\partial B_1(0)$ divergent.
<u>zu (2):</u>
Behauptung:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} \text{ ist } \begin{cases} \text{konvergent} & , |z|<1 \\ \text{konvergent} & , |z|=1 \text{ und } z\neq 1 \\ \text{divergent} & , |z|=1 \text{ und } z=1 \\ \text{divergent} & , |z|>1 \end{cases}$$

Beweis: Der Konvergenzradius r lässt sich entweder mit der Formel von Cauchy-Hadamard

$$r=\frac{1}{\limsup_{n\in\mathbb{N}}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\limsup_{n\in\mathbb{N}}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}}=1$$

oder mit der Quotientenformel

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{1}{n}\right|=1$$

berechnen. Beide Methoden liefern uns den Konvergenzradius $r=1$. Damit konvergiert die Reihe für jedes z aus dem Inneren der offenen (Einheits-)Kreisscheibe $B_1(0)=\mathring{\mathbb{E}}=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$ absolut und divergiert für jedes z aus dem Äußeren dieser Kreisscheibe. Es bleibt das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzkreises $B_1(0)$ zu untersuchen. Dazu sei $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|=1$, also $z\in\partial B_1(0)$. Dann lässt sich z in Polarform auch eindeutig darstellen durch $z=e^{i\varphi}$ mit $\varphi\in]-\pi,\pi]$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:
• 1. Fall: ($z\in\partial B_1(0)$ mit $z=1$ bzw. $\varphi=0$). In diesem Fall erhalten wir die harmonische Reihe, die bekanntlich divergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\overset{z=1}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$$

Damit divergiert die Reihe im Randpunkt $z=1$.
• 2. Fall: ($z\in\partial B_1(0)$ mit $z\neq 1$ bzw. $\varphi\in]-\pi,0[\cup]0,\pi]$). Zunächst gilt wegen des Hinweises und der (endlichen) geometrischen Summe:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}&=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}z^n\frac{1}{n}\overset{\text{Hinweis}}{=}\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N}z^k+\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{n}z^k\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)\right]\\ &=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{z}{N+1}\sum_{k=0}^{N-1}z^k+\sum_{n=1}^{N}\left(z\sum_{k=0}^{n-1}z^k\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)\right]\\ &=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{z}{N+1}\cdot\frac{z^N-1}{z-1}+\sum_{n=1}^{N}\frac{z^n-1}{z-1}\cdot\frac{z}{n(n+1)}\right]\end{aligned}$$

$$=\frac{z}{z-1}\cdot\lim_{N\to\infty}\left[\frac{z^N-1}{N+1}+\sum_{n=1}^{N}\frac{z^n-1}{n(n+1)}\right]$$
$$=\frac{z}{z-1}\cdot\left[\lim_{N\to\infty}\frac{z^N}{N+1}-\underbrace{\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}}_{=0}+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{z^n}{n(n+1)}-\underbrace{\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}}_{=1}\right]$$
$$=\frac{z}{z-1}\cdot\left[-1+\lim_{N\to\infty}\frac{\left(e^{i\varphi}\right)^N}{N+1}+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{z^n}{n(n+1)}\right]$$
$$=\frac{z}{z-1}\cdot\left[-1+\underbrace{\lim_{N\to\infty}\frac{\cos(\varphi N)}{N+1}}_{=0}+i\cdot\underbrace{\lim_{N\to\infty}\frac{\sin(\varphi N)}{N+1}}_{=0}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(n+1)}\right]$$
$$=\frac{z}{z-1}\cdot\left[-1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(n+1)}\right]\quad\forall\, z\in\mathbb{C}\text{ mit }|z|=1\text{ und }z\neq 1$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(n+1)}$ konvergiert. Dazu verwenden wir das Weierstraßsche Majorantenkriterium (für Funktionenreihen). Betrachte $a_n:=\frac{1}{n(n+1)}$ für $n\in\mathbb{N}$. Offenbar gilt $a_n\in\mathbb{R}_+\ \forall n\in\mathbb{N}$. Desweiteren wissen wir (aus der Analysis 1), dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ gegen 1 konvergiert. Betrachte nun $U:=\partial B_1(0)\backslash\{1\}$ und $f_n:\partial B_1(0)\backslash\{1\}\to\mathbb{C}$ mit $f_n(z):=\frac{z^n}{n(n+1)}$ und $n\in\mathbb{N}$. Dann erhalten wir die Abschätzung für das Supremum durch

$$\|f_n\|_\infty=\sup_{z\in B_1(0)\backslash\{1\}}|f_n(z)|=\sup_{\substack{|z|=1\\z\neq1}}\left|\frac{z^n}{n(n+1)}\right|=\sup_{\substack{|z|=1\\z\neq1}}\frac{|z|^n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

Das Weierstraßschen Majorantenkriterium (für Funktionenreihen) liefert uns jetzt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(n+1)}\text{ ist absolut konvergent }\forall\, z\in\mathbb{C}\text{ mit }|z|=1\text{ und }z\neq1$$

und daher ist auch $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ für $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|=1$ und $z\neq1$ absolut konvergent. Damit ist die Reihe auf dem gesamten Randbereich $\partial B_1(0)\backslash\{1\}$ konvergent und in $z=1$ divergent. Zusatz: Es gilt sogar

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(n+1)}=-\ln(1-z)+\frac{\ln(1-z)}{z}+1\quad\forall\, z\in\mathbb{C}\text{ mit }|z|=1\text{ und }z\neq1$$

und damit insgesamt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=-\ln(1-z)\quad\forall\, z\in\mathbb{C}\text{ mit }|z|=1\text{ und }z\neq1$$

zu (3): Behauptung:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}\text{ ist }\begin{cases}\text{konvergent} & ,\ |z|\leqslant1\\ \text{divergent} & ,\ |z|>1\end{cases}$$

Beweis: Der Konvergenzradius r lässt sich entweder mit der Formel von Cauchy-Hadamard

$$r=\frac{1}{\limsup_{n\in\mathbb{N}}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\limsup_{n\in\mathbb{N}}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}}=1$$

oder mit der Quotientenformel

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right|=1$$

berechnen. Beide Methoden liefern uns den Konvergenzradius $r = 1$. Damit konvergiert die Reihe für jedes z aus dem Inneren der offenen (Einheits-)Kreisscheibe $B_1(0) = \overset{\circ}{\mathbb{E}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ absolut und divergiert für jedes z aus dem Äußeren dieser Kreisscheibe. Es bleibt das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzkreises $B_1(0)$ zu untersuchen. Dazu sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, also $z \in \partial B_1(0)$. Um die Konvergenz auf dem Rand zu zeigen, verwenden wir erneut das Weierstraßsche Majorantenkriterium. Betrachte $a_n := \frac{1}{n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Offenbar gilt $a_n \in \mathbb{R}_+ \; \forall n \in \mathbb{N}$. Weiter wissen wir (aus der Analysis 1), dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ gegen $\frac{\pi^2}{6}$ konvergiert. Betrachte nun $U := \partial B_1(0)$ und $f_n : \partial B_1(0) \to \mathbb{C}$ mit $f_n(z) := \frac{z^n}{n^2}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann erhalten wir die Abschätzung für das Supremum durch

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{z \in B_1(0)} |f_n(z)| = \sup_{|z|=1} \left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \sup_{|z|=1} \frac{|z|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Das Weierstraßschen Majorantenkriterium (für Funktionenreihen) liefert uns daher

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \text{ ist absolut konvergent } \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| = 1$$

Damit ist die Reihe auf dem gesamten Rand $\partial B_1(0)$ absolut konvergent.

Aufgabe 33

Sei f eine in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion, die auf $\mathbb{R}$ reellwertig ist. Zeigen Sie:

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$$

Lösung:

Da $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist (denn f ist eine ganze Funktion), lässt sich f in jedem beliebigen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ (nach dem Potenzreihenentwicklungssatz) in eine Potenzreihe entwickeln, d.h.

$$\forall z_0 \in \mathbb{C}: \; f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ wobei } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Speziell für $z_0 = 0$ erhalten wir also:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ wobei } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

(Die Ableitungen in a_n existieren, da wir zum einen wissen, dass f holomorph in $\mathbb{C}$ ist und zum anderen wissen, dass eine Funktion, die einmal komplex-differenzierbar ist, dann auch unendlich oft komplex-differenzierbar ist.) Da f reellwertig in $\mathbb{R}$ ist, sind auch alle Ableitungen in $\mathbb{R}$ reellwertig, d.h.

$$f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \implies f^{(n)}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \; \forall n \in \mathbb{N}$$

(Denn: Betrachten wir $f(z) = \mathrm{Re}(f(z)) + i \cdot \mathrm{Re}(f(z))$, dann gilt zunächst $\mathrm{Im}(f(z)) = 0 \; \forall z \in \mathbb{R}$ (da f in $\mathbb{R}$ reellwertig). Da nun $f^{(n)}(z) = (\mathrm{Re}(f(z)))^{(n)} + i \cdot \mathrm{Im}(f(z)))^{(n)}$ gilt (da f holomorph in $\mathbb{C}$), muss $(\mathrm{Im}(f(z)))^{(n)} = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ gelten.) Daher gilt jetzt $f^{(n)}(0) \in \mathbb{R} \; \forall n \in \mathbb{N}$ und somit

$$a_n \in \mathbb{R} \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Kommen wir schlussendlich zu unserer Gleichung:

$$\overline{f(z)} \overset{(1)}{=} \overline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n} = \overline{\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n z^n} \overset{(2)}{=} \lim_{N\to\infty} \overline{\sum_{n=0}^{N} a_n z^n} \overset{(3)}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \overline{a_n z^n} \overset{(4)}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \overline{a_n}\,\overline{z}^n$$
$$\overset{(5)}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n \overline{z}^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{z}^n \overset{(1)}{=} f(\overline{z}) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(1): Potenzreihenentwicklung von f in $z_0 = 0$, (2): $z_n \to z; \Longleftrightarrow \overline{z_n} \to \overline{z}$, (3): Additivität der komplexen Konjugation, (4): Multiplikativität der komplexen Konjugation, (5): $a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 34

Bestimmen Sie die Nullstellenordnung von

(1): $\sin(z)$
(2): $\tan(z)$
(3): $\sin^2(z)$
(4): $\sin(z^2)$

in den jeweiligen Nullstellen.

Lösung:

Erinnerung:
Nullstellenordnung: $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph in U, $z_0 \in U$ mit $f(z_0) = 0$ (d.h. z_0 ist eine Nullstelle von f). Dann besitzt f in z_0 eine Nullstelle der Ordnung $k \in \mathbb{N}$

$$:\Longleftrightarrow \begin{cases} f^{(n)}(z_0) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } 0 \leqslant n < k \\ \quad \text{und} \\ f^{(k)}(z_0) = 0 \end{cases}$$

zu (a): Nach Aufgabe 9(c) ist die Funktion $\sin(z)$ auf ganz $U := \mathbb{C}$ holomorph und weiter ist die Nullstellenmenge des komplexen Sinus $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\pi\mathbb{Z} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Sei $k \in \mathbb{Z}$ beliebig, so gilt

$$\sin(k\pi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$
$$\left[\frac{d}{dz}\sin(z)\right](k\pi) = \cos(k\pi) \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Damit ist die Ordnung der Nullstelle $k\pi$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gleich 1, d.h.

$$\operatorname{ord}_{k\pi}(\sin(z)) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

zu (b): Nach Aufgabe 9(d) ist die Funktion $\tan(z)$ auf $U := \mathbb{C}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ holomorph und weiter ist die Nullstellenmenge des komplexen Tangens $\tan : \mathbb{C}\backslash\{(k + \frac{1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z})\} \to \mathbb{C}$ (wegen $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$) gegeben durch

$$\pi\mathbb{Z} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Sei $k \in \mathbb{Z}$ beliebig, so gilt

$$\tan(k\pi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$
$$\left[\frac{d}{dz}\tan(z)\right](k\pi) = \frac{\cos^2(k\pi) + \sin^2(k\pi)}{\cos^2(k\pi)} = \frac{1}{\cos^2(k\pi)} \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Damit ist die Ordnung der Nullstelle $k\pi$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gleich 1, d.h.

$$\operatorname{ord}_{k\pi}(\tan(z)) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

zu (c): Nach Aufgabe 9(c) ist die Funktion $\sin(z)$ (und daher auch $\sin^2(z)$) auf ganz $U := \mathbb{C}$ holomorph und weiter ist die Nullstellenmenge der Funktion $\sin^2(z)$ gegeben durch

$$\pi\mathbb{Z} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

• 1. Möglichkeit: (Ordnungsfunktion). Aus den Rechenregeln der Ordnungsfunktion ord und aus Aufgabenteil (a) folgern wir leicht

$$\operatorname{ord}_{k\pi}(\sin^2(z)) = \operatorname{ord}_{k\pi}(\sin(z)\cdot\sin(z)) = \underbrace{\operatorname{ord}_{k\pi}(\sin(z))}_{=1} + \underbrace{\operatorname{ord}_{k\pi}(\sin(z))}_{=1} = 1+1 = 2 \quad \forall\, k\in\mathbb{Z}$$

• 2. Möglichkeit: (Differenzieren). Es gilt:

$$\sin^2(k\pi) = 0 \quad \forall\, k\in\mathbb{Z}$$
$$\left[\frac{d}{dz}\sin^2(z)\right](k\pi) = 2\sin(k\pi)\cos(k\pi) = 0 \quad \forall\, k\in\mathbb{Z}$$
$$\left[\frac{d^2}{dz^2}\sin^2(z)\right](k\pi) = 2\cos^2(k\pi) - 2\sin^2(k\pi) \neq 0 \quad \forall\, k\in\mathbb{Z}$$

Damit ist die Ordnung der Nullstelle $k\pi$ für jedes $k\in\mathbb{Z}$ gleich 2, d.h.

$$\operatorname{ord}_{k\pi}(\sin^2(z)) = 2 \quad \forall\, k\in\mathbb{Z}$$

zu (d): Nach den Aufgaben 9(a) und 9(c) sind die Funktion z^2 und $\sin(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Somit ist die Komposition $\sin(z^2)$ auch auf ganz $U := \mathbb{C}$ holomorph und weiter ist die Nullstellenmenge der Funktion $\sin(z^2)$ gegeben durch

$$\pm\sqrt{\pi\mathbb{Z}} = \{\pm\sqrt{k\pi} \mid k\in\mathbb{Z}\}$$

Sei $k\in\mathbb{Z}$ beliebig.
• 1. Fall: $(k=0)$.

$$\sin(0) = 0$$
$$\left[\frac{d}{dz}\sin(z^2)\right](0) = 0$$
$$\left[\frac{d^2}{dz^2}\sin(z^2)\right](0) \neq 0$$

Damit ist die Ordnung der Nullstelle 0 gleich 2, d.h.

$$\operatorname{ord}_0(\sin(z^2)) = 2$$

• 2. Fall: $(k\neq 0)$.

$$\sin((\pm\sqrt{k\pi})^2) = 0 \quad \forall\, k\in\mathbb{Z} \text{ mit } k\neq 0$$
$$\left[\frac{d}{dz}\sin(z^2)\right](\pm\sqrt{k\pi}) \neq 0 \quad \forall\, k\in\mathbb{Z} \text{ mit } k\neq 0$$

Damit ist die Ordnung der Nullstelle $k\pi$ für jedes $k\in\mathbb{Z}$ mit $k\neq 0$ gleich 1, d.h.

$$\operatorname{ord}_{k\pi}(\sin(z^2)) = 1 \quad \forall\, k\in\mathbb{Z} \text{ mit } k\neq 0$$

Aufgabe 35

Sei $R>0$ und $f: B_R(0)\to\mathbb{C}$ eine nicht konstante und holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\rho:]0,R[\to \mathbb{R} \text{ mit } r \longmapsto \sup_{|z|=r} |f(z)| =: \rho(r)$$

eine streng monoton wachsende Funktion ist.

Lösung:

Erinnerung:
Maximumprinzip: $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph in G und f besitze ein Betragsmaximum im Inneren von D (d.h. $\exists\, a \in D\ \forall\, z \in D : |f(z)| \leqslant |f(a)|$). Dann ist f konstant in D.
Identitätssatz für analytische Funktionen: $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1): $f(z) = g(z)\ \forall\, z \in G$

(2): Die Menge $\{z \in G \mid f(z) = g(z)\}$ hat einen Häufungspunkt in G

(3): $\exists\, c \in G\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0 :\ f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$

Potenzreihenentwicklungssatz: $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter seien $c \in \mathbb{C}$ und $r \in]0, +\infty[$ mit $B_r(c) \subset U$. Dann lässt sich f lokal (d.h. auf der offenen Kreisscheibe $B_r(c)$) durch eine Potenzreihe darstellen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n\ \forall\, z \in B_r(c), \text{ wobei } a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(c)} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} dz,\ n \in \mathbb{N}_0$$

• 1. Möglichkeit: (Maximumsprinzip, Identitätssatz).
i) z.z.: ρ monoton wachsend (d.h. $\forall\, r_1, r_2 \in]0, R[$ mit $r_1 < r_2$: $\rho(r_1) \leqslant \rho(r_2)$)
Wir zeigen zunächst, dass f den betragsmäßig größten Wert auf dem Rand annimmt: Angenommen f besitzt im Inneren von $B_R(0)$ ein Betragsmaximum, dann folgt aus dem Maximumprinzip, dass f in $B_R(0)$ konstant ist, was ein Widerspruch zur Voraussetzung der Aufgabe ist. Damit befindet sich das Betragsmaximum von f auf dem Rand von $B_R(0)$.
Wähle $r_1 \in]0, R[$ und betrachte die kompakte Teilmenge $\overline{B_{r_1}(0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant r_1\} \subset B_R(0)$. Da f holomorph in $B_R(0)$ ist, ist f insbesondere holomorph in $B_{r_1}(0)$ und stetig in $\overline{B_{r_1}(0)}$. Angenommen f nimmt sein Betragsmaximum im Inneren von $B_{r_1}(0)$ an, so folgt aus dem Maximumprinzip, dass f in $B_{r_1}(0)$ konstant ist, und weiter folgt mit dem Identitätssatz für analytische Funktionen, dass f sogar in $B_R(0)$ konstant ist, was ein Widerspruch zur Voraussetzung der Aufgabe ist. Daher nimmt f sein Betragsmaximum in $B_{r_1}(0)$ auf dem Rand an. Daraus folgt:

$$\forall\, r_1, r_2 \in]0, R[\text{ mit } r_1 < r_2 :\ \rho(r_1) = \sup_{|z|=r_1} |f(z)| \leqslant \sup_{|z|=r_2} |f(z)| = \rho(r_2)$$

ii) z.z.: ρ streng monoton wachsend (d.h. $\forall\, r_1, r_2 \in]0, R[$ mit $r_1 < r_2$: $\rho(r_1) < \rho(r_2)$)
Seien $r_1, r_2 \in]0, R[$ mit $r_1 < r_2$. Angenommen es gilt

$$\sup_{|z|=r_1} |f(z)| = \sup_{|z|=r_2} |f(z)|$$

dann besitzt f im Inneren von $B_{r_2}(0)$ ein Betragsmaximum (d.h. es gibt ein $a \in B_{r_2}(0)\ \forall\, z \in D$: $|f(z)| \leqslant |f(a)|$). Nach dem Maximumprinzip ist f damit konstant in $B_{r_2}(0)$ und somit folgt aus dem Identitätssatz für analytische Funktionen, dass f sogar in $B_R(0)$ konstant ist, was einen Widerspruch zur Voraussetzung der Aufgabe liefert. Damit kann die angenommene Gleichheit nicht gelten und folglich ist ρ streng monoton wachsend, d.h.

$$\forall\, r_1, r_2 \in]0, R[\text{ mit } r_1 < r_2 :\ \rho(r_1) = \sup_{|z|=r_1} |f(z)| < \sup_{|z|=r_2} |f(z)| = \rho(r_2)$$

• 2. Möglichkeit: (Potenzreihenentwicklungssatz, Polarform).
z.z.: ρ streng monoton wachsend (d.h. $\forall\, r_1, r_2 \in]0, R[$ mit $r_1 < r_2$: $\rho(r_1) < \rho(r_2)$)
Nach Voraussetzung ist f in $B_R(0)$ holomorph. Daher lässt sich f nach dem Potenzreihenentwicklungssatz lokal (d.h. auf der offenen Kreisscheibe $B_R(0)$) durch eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $c = 0$ darstellen durch

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\ \forall\, z \in B_R(0), \text{ wobei } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ n \in \mathbb{N}_0$$

Betrachte die eindeutige Darstellung in Polarform von $z = re^{i\varphi}$ mit $r = |z| \in]0, R[$ und $\varphi \in] - \pi, \pi[$. Seien nun $r_1, r_2 \in]0, R[$ mit $r_1 < r_2$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\rho(r_1) &= \sup_{|z|=r_1} |f(z)| = \sup_{|z|=r_1} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| = \sup_{\varphi \in]-\pi,\pi]} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(r_1 e^{i\varphi} \right)^n \right| \\
&< \sup_{\varphi \in]-\pi,\pi]} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(r_2 e^{i\varphi} \right)^n \right| = \sup_{|z|=r_2} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| = \sup_{|z|=r_2} |f(z)| = \rho(r_2)
\end{aligned}$$

Da die Wahl von $r_1, r_2 \in]0, R[$ mit $r_1 < r_2$ beliebig war, ist ρ folglich streng monoton wachsend auf $]0, R[$.