Aufgabe 36

Sei P ein Polynom der Ordnung $n \in \mathbb{N}$. Sei $a \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $\{z \in \mathbb{C} \mid P(z) = a\}$ höchstens $\mathrm{grad}(P) = n$ Elemente hat oder ganz $\mathbb{C}$ ist.

Lösung:

Erinnerung:
Fundamentalsatz der Algebra: Jedes nichtkonstante komplexe Polynom besitzt in $\mathbb{C}$ so viele Nullstellen, wie sein Grad angibt.
Für den Beweis von Aufgabe 37 unterscheiden wir zwei Fälle:
• 1. Fall: (P ist konstant). Da P ein konstantes Polynom ist, gilt $\mathrm{grad}(P) = n = 0$. Es sei daher o.B.d.A. $P(z) = c \in \mathbb{C} \ \forall\, z \in \mathbb{C}$.
1. Unterfall: ($a = c$). Wegen $a = c$ ist $P(z) = c = a$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ erfüllt und es gilt, dass die Menge mit ganz $\mathbb{C}$ übereinstimmt

$$\{z \in \mathbb{C} \mid P(z) = a\} = \mathbb{C}$$

2. Unterfall: ($a \neq c$). Wegen $a \neq c$ ist $P(z) = a$ für kein $z \in \mathbb{C}$ erfüllt (denn: $P(z) = c \neq a \ \forall\, z \in \mathbb{C}$). Demzufolge gilt:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid P(z) = a\} = \emptyset \text{ besitzt genau } n = 0 \text{ Elemente}$$

• 2. Fall: (P ist nichtkonstant). Da P ein nichtkonstantes Polynom ist, gilt für $\mathrm{grad}(P) = n > 1$. Definiere für ein beliebiges aber festes $a \in \mathbb{C}$ das Polynom

$$Q(z) := P(z) - a \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

Dann ist auch Q ein nichtkonstantes Polynom mit $\mathrm{grad}(Q) = n > 1$. Gesucht wird jetzt die Anzahl der Elemente von (beachte: $Q(z) = P(z) - a \ \forall\, z \in \mathbb{C}$)

$$\{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid P(z) = a\}$$

Nach dem (gaußschen) Fundamentalsatz der Algebra gilt, dass das Polynom Q über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerfällt (d.h. $\mathbb{C}$ ist ein algebraisch abgeschlossener Körper). Genauer gilt sogar, dass die Anzahl der Nullstellen von Q, insofern sie mit der richtigen Vielfachheit gezählt werden, gleich dem Grad des Polynoms Q ist. Damit gilt

$$\{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0\} \text{ besitzt höchstens } \mathrm{grad}(Q) = n \text{ Elemente}$$

und somit besitzt (wegen der obigen Gleichheit $Q(z) = P(z) - a$) auch die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid P(z) = a\}$ höchstens n Elemente. Beachte: Die Menge besitzt genau n Elemente, wenn jede Nullstelle von Q genau einmal auftritt.

Aufgabe 37

Sei f eine holomorphe Funktion auf einem beschränkten Gebiet D und $|f|$ habe eine stetige Fortsetzung auf $\overline{D}$. Sei $|f|$ konstant auf dem Rand. Zeigen Sie, dass f entweder eine Nullstelle hat oder konstant ist.

Lösung:

Erinnerung:
Maximumprinzip (für beschränkte Gebiete): $G \subset \mathbb{C}$ beschränktes Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig mit $\overline{G} := G \cup \partial G$. Dann gilt: $|f|$ nimmt sein Maximum auf dem Rand ∂G an, d.h.

$$|f(z)| \leqslant \max_{C \in \partial G} |f(C)| \quad \forall\, z \in \overline{G}$$

oder anders

$$\exists\, C \in \partial G : \ |f(z)| \leqslant |f(C)| \quad \forall\, z \in \overline{G}$$

Zusatz: Gleichheit gilt genau dann, wenn f konstant ist.

1. Fall: (f besitzt eine Nullstelle in $\overline{G}$). Dann sind wir fertig.
2. Fall: (f besitzt keine Nullstelle in $\overline{G}$). Da $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $|f| : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig ist, folgt, dass $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig ist. Da $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig ist, folgt aus dem Maximumprinzip

$$\exists\, C_1 \in \partial G : \; |f(z)| \leqslant |f(C_1)| \quad \forall\, z \in \overline{G}$$

Da f keine Nullstelle in $\overline{G}$ besitzt, gilt $0 < |f(z)|$, insgesamt also $0 < |f(z)| \leqslant |f(C_1)|\ \forall\, z \in \overline{G}$, und hieraus schließen wir vorab einmal $\frac{1}{|f(z)|} \geqslant \frac{1}{|f(C_1)|}$ für jedes $z \in \overline{G}$. Als nächstes betrachten wir die Funktion $\frac{1}{f}$, die (da f keine Nullstellen in $\overline{G}$ besitzt) auf ganz $\overline{G}$ definiert ist. Da $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $\frac{1}{f} : G \to \mathbb{C}$ holomorph (wegen $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph) und $\frac{1}{f} : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig (wegen $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig) ist, folgt aus dem Maximumsprinzip

$$\exists\, C_2 \in \partial G : \left|\frac{1}{f(z)}\right| \leqslant \left|\frac{1}{f(C_2)}\right| \quad \forall\, z \in \overline{G}$$

Setzen wir die beiden Resultate des Maximumprinzips zusammen, so haben wir

$$\frac{1}{|f(C_1)|} \leqslant \frac{1}{|f(z)|} \leqslant \left|\frac{1}{f(C_2)}\right| \quad \forall\, z \in \overline{G}$$

Da $|f|$ konstant auf dem Rand ∂G ist, gilt $|f(C_1)| = |f(C_2)|$ und damit

$$\frac{1}{|f(C_1)|} = \frac{1}{|f(z)|} = \left|\frac{1}{f(C_2)}\right| \quad \forall\, z \in \overline{G}$$

Damit ist die Funktion $\frac{1}{|f|}$ und daher auch die Funktion $|f|$ konstant auf $\overline{G}$. Nun wenden wir ein letztes Mal das Maximumsprinzip an: Da $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig ist, folgt - wie oben bereits behandelt - aus dem Maximumprinzip

$$\exists\, C_1 \in \partial G : \; |f(z)| \leqslant |f(C_1)| \quad \forall\, z \in \overline{G}$$

Da $|f|$ aber konstant ist, gilt sogar $|f(z)| = |f(C_1)|$ für jedes $z \in \overline{G}$. Nach dem Zusatz des Maximumprinzips folgt aus der Gleichheit, dass $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ konstant ist.

Aufgabe 38

Definition: Sei f eine ganze Funktion. Man sagt, dass f die Ordnung ρ besitzt, falls

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(f,r)}{\ln r}, \text{ wobei } M(f,r) := \sup_{|z|\leqslant r} |f(z)|$$

Zeigen Sie, dass

(1): $\exp(e^z)$ keine endliche Ordnung hat
(2): $\cos(z)$ die Ordnung 1 hat
(3): Polynome die Ordnung 0 haben

Lösung:

Erinnerung:
Ordnung einer Funktion: f ganze Funktion (d.h. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph). Das Infimum aller Zahlen a, für die

$$|f(z)| \leqslant e^{(|z|^a)} \quad \forall\ |z| > r$$

gilt, wobei $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$, heißt *Ordnung der Funktion f*. Es gilt:

$$\rho := \inf\{a \mid |f(z)| \leqslant e^{(|z|^a)}\ \forall |z| > r\} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln \sup_{|z|\leqslant r} |f(z)|}{\ln r}$$

zu (1):
Aus dem Maximumprinzip (MP) und mit der Notation $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ erhalten wir

$$\begin{aligned} M\left(e^{(e^z)}, r\right) &= \sup_{|z|\leqslant r} \left|e^{(e^z)}\right| \overset{\text{(MP)}}{=} \sup_{|z|=r} \left|e^{(e^z)}\right| = \sup_{|z|=r} e^{\operatorname{Re}(e^z)} = \sup_{|z|=r} e^{\left(e^{x\cos(y)}\right)} \\ &= \sup_{x\in[-r,r]} e^{\left(e^{x\cos\left(\pm\sqrt{r^2-x^2}\right)}\right)} = e^{(e^r)} \end{aligned}$$

Da ln die Umkehrfunktion von exp ist, erhalten wir für die Funktion $e^{(e^z)}$ die Ordnung $\rho = \infty$ durch

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M\left(e^{(e^z)}\right)}{\ln r} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln e^{(e^r)}}{\ln r} = \limsup_{r\to\infty} \frac{r}{\ln r} = \infty$$

zu (2):
Aus dem Maximumprinzip (MP), den Eigenschaften der Hyperbelfunktionen

$$\begin{aligned} &\sinh(z) = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) \ \forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \cosh(z) = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) \ \forall\, z \in \mathbb{C} \\ &\cos(z) = \cosh(iz) \ \forall\, z \in \mathbb{C} \\ &|\cosh(x+iy)| = \sqrt{\sinh^2(x) + \cos^2(y)} \ \forall\, x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(letzteres lässt sich mit Hilfe von

$$\begin{aligned} &\cosh(x+iy) = \cos(y)\cosh(x) + i\sin(y)\sinh(x) \ \forall\, x, y \in \mathbb{R} \\ &\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \ \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ und } \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

beweisen) und mit der Notation $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ erhalten wir

$$\begin{aligned} M(\cos(z), r) &= \sup_{|z|\leqslant r} |\cos(z)| \overset{\text{(MP)}}{=} \sup_{|z|=r} |\cos(z)| = \sup_{|z|=r} |\cosh(iz)| = \sup_{|z|=r} |\cosh(-y+ix)| \\ &= \sup_{|z|=r} \sqrt{\sinh^2(-y) + \cos^2(x)} = \sup_{x\in[-r,r]} \sqrt{\sinh^2(\sqrt{r^2-x^2}) + \cos^2(x)} \\ &= \sqrt{\sinh^2(r) + 1} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(e^r - e^{-r}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{2r} + 2 + e^{-2r}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}\left(e^r + e^{-r}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(e^r + e^{-r}\right) \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{r\to\infty} \ln\ln\left(\frac{1}{2}\left(e^{-r}+e^r\right)\right) = \infty$ und $\lim_{r\to\infty} \ln r = \infty$, dürfen wir die L'Hospitalschen Regeln (HR) anwenden. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(\cos(z), r)}{\ln r} &= \lim_{r\to\infty} \frac{\ln\ln\left(\frac{1}{2}\left(e^{-r}+e^r\right)\right)}{\ln r} \overset{\text{(HR)}}{=} \lim_{r\to\infty} \frac{\frac{d}{dr}\ln\ln\left(\frac{1}{2}\left(e^{-r}+e^r\right)\right)}{\frac{d}{dr}\ln r} \\ &= \lim_{r\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{2}(e^{-r}+e^r)\right)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}(e^{-r}+e^r)} \cdot \frac{1}{2}\left(e^r - e^{-r}\right)}{\frac{1}{r}} \\ &= \lim_{r\to\infty} \frac{(e^r - e^{-r})r}{(e^{-r}+e^r)\ln\left(\frac{1}{2}\left(e^{-r}+e^r\right)\right)} = 1 \end{aligned}$$

Weiter wissen wir: Falls für eine reelle Zahlenfolge $(c_r)_{r\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ der Limes $\lim_{r\to\infty} c_r$ existiert, so stimmt der Limes $\lim_{r\to\infty} c_r$ mit dem Limes Superior $\limsup_{r\to\infty} c_r$ überein, d.h.$\limsup_{r\to\infty} c_r = \lim_{r\to\infty} c_r$. Daraus erhalten wir für den komplexen Kosinus cos die Ordnung $\rho = 1$

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(\cos(z), r)}{\ln r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(\cos(z), r)}{\ln r} = 1$$

zu (3):
Für ein allgemeines komplexes Polynom n-ten Grades mit $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{j=0}^{n} a_j z^j = z^n \sum_{j=0}^{n} a_j z^{j-n} = z^n(a_0 z^{-n} + a_1 z^{1-n} + \cdots + a_{n-1}z^{-1} + a_n)$$

wobei $a_n \neq 0$. Man beachte nun, dass für den hinteren Term gilt:

$$\lim_{z\to\infty} a_0 z^{-n} + a_1 z^{1-n} + \cdots + a_{n-1}z^{-1} + a_n = a_n$$

Daher genügt es den Term $a_n z^n$ zu untersuchen. Aus dem Maximumprinzip (MP) erhalten wir

$$M(a_n z^n, r) = \sup_{|z|\leqslant r} |a_n z^n| \overset{\text{(MP)}}{=} \sup_{|z|=r} |a_n z^n| = \sup_{|z|=r} |a_n|\,|z|^n = |a_n|\,r^n$$

Als nächstes betrachten wir

$$\frac{\ln\ln M(a_n z^n, r)}{\ln r} = \frac{\ln\ln(|a_n| r^n)}{\ln r} = \frac{\ln\left(\ln|a_n| + \ln r^n\right)}{\ln r} = \frac{\ln\left(\ln|a_n| + \ln e^{n\ln r}\right)}{\ln r} = \frac{\ln\left(\ln|a_n| + n\ln r\right)}{\ln r}$$

Wegen $\lim_{r\to\infty}\ln(\ln|a_n| + n\ln r) = \infty$ und $\lim_{r\to\infty}\ln r = \infty$, dürfen wir die L'Hospitalschen Regeln (HR) anwenden. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M(a_n z^n, r)}{\ln r} &= \lim_{r\to\infty}\frac{\ln\left(\ln|a_n| + n\ln r\right)}{\ln r} \overset{\text{(HR)}}{=} \lim_{r\to\infty}\frac{\frac{d}{dr}\ln\left(\ln|a_n| + n\ln r\right)}{\frac{d}{dr}\ln r}\\ &= \lim_{r\to\infty}\frac{\frac{n}{r(\ln|a_n| + n\ln r)}}{\frac{1}{r}} = \lim_{r\to\infty}\frac{n}{\ln|a_n| + n\ln r} = 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

Weiter wissen wir: Falls $\lim_{r\to\infty} c_r$ existiert, so gilt $\limsup_{r\to\infty} c_r = \lim_{r\to\infty} c_r$. Daraus erhalten wir die Ordnung $\rho = 0$ für ein beliebiges komplexes Polynom n-ten Grades

$$\rho = \limsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M(a_n z^n, r)}{\ln r} = \lim_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M(a_n z^n, r)}{\ln r} = 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Aufgabe 39

Sei f eine ganze Funktion. Zeige die Äquivalenz der Aussagen

(1): f ist kein Polynom

(2): $\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln M(f,r)}{\ln r} = \infty$

Lösung:

Erinnerung:
Verallgemeinerung des Satzes von Liouville: $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ganze Funktion (d.h. holomorph auf $\mathbb{C}$) und $n\in\mathbb{N}$. Weiter gelte:

$$\exists R\in\mathbb{R}_+ \;\wedge\; \exists M\in\mathbb{R}_+ : \; |f(z)| \leqslant M\,|z|^n \quad \forall\,|z|\geqslant R$$

Dann ist f ein Polynom vom Grad $\leqslant n$.

(2) $\Longrightarrow$ (1):
Sei $\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln M(f,r)}{\ln r} = \infty$. Angenommen f ist ein Polynom, dann gilt für jedes $n\in\mathbb{N}$ (siehe: Teil (3) in Aufgabe 39):

$$\begin{aligned}&M(a_n z^n, r) = |a_n|\,r^n\\ \Longrightarrow\;& \ln M(a_n z^n, r) = \ln(|a_n|\,r^n) = \ln|a_n| + \ln r^n = \ln|a_n| + n\ln r\\ \Longrightarrow\;& \frac{\ln M(a_n z^n, r)}{\ln r} = \frac{\ln|a_n|}{\ln r} + n\frac{\ln r}{\ln r} = \frac{\ln|a_n|}{\ln r} + n\\ \Longrightarrow\;& \limsup_{r\to\infty}\frac{\ln M(a_n z^n, r)}{\ln r} = \limsup_{r\to\infty}\left(\frac{\ln|a_n|}{\ln r} + n\right) = n \neq \infty\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir einen Widerspruch zu $\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(f,r)}{\ln r} = \infty$. Folglich ist unsere Annahme falsch und f kann kein Polynom sein.

<u>(1) $\Longrightarrow$ (2):</u>

Sei f kein Polynom. Angenommen es gilt

$$\exists\, C \in \mathbb{R}: \ \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(f,r)}{\ln r} = C < \infty$$

wobei wir den Limes Superior für $r \in \mathbb{R}_+$ betrachten. Dann gilt diese Aussage anstelle von $r \in \mathbb{R}_+$ insbesondere für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln M(f,n)}{\ln n} = C$$

Nach der Definition des Limes Superiors ist dies gleichbedeutend mit

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\sup_{k\geqslant n} \frac{\ln M(f,k)}{\ln k} \right)}_{=:a_n} = C$$

In diesem Fall können wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als eine reelle konvergente Folge auffassen. Da aber jede konvergente Folge beschränkt ist und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen C konvergiert, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offenbar beschränkt, d.h. es gilt

$$\exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}: \ \sup_{k\geqslant n} \frac{\ln M(f,k)}{\ln k} \leqslant N$$

Speziell für $n = 1$ erhalten wir demzufolge

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\ln M(f,r)}{\ln k} \leqslant N$$

Und damit gilt nach dem Maximumprinzip (MP) und nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned}
& \frac{\ln M(f,r)}{\ln k} \leqslant N \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \\
\Longleftrightarrow \quad & \ln M(f,k) \leqslant N \cdot \ln k = \ln k^N \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \\
\Longleftrightarrow \quad & \sup_{|z|=k} |f(z)| \overset{(\mathrm{MP})}{=} \sup_{|z|\leqslant k} |f(z)| = M(f,k) \leqslant k^N \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \\
\Longrightarrow \quad & |f(z)| \leqslant |z|^N \quad \forall\, |z| \leqslant k\ \forall\, k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Als nächstes wollen wir die obige Verallgemeinerung des Liouvilleschen Satzes anwenden. Dazu bleibt die Voraussetzung des Satzes zu überprüfen, die wir durch einen Widerspruch nachweisen werden. Betrachte dort $M := 1$ und $R \in \mathbb{R}_+$ beliebig aber fest. Angenommen

$$\exists\, z^* \in \mathbb{C} \text{ mit } |z^*| \geqslant R: \ |f(z^*)| > |z^*|^N$$

Einerseits folgt daraus

$$\sup_{|z|=|z^*|} |f(z)| \geqslant |f(z^*)| > |z^*|^N$$

und andererseits haben wir oben mit $k = |z^*|$ bereits

$$\sup_{|z|=|z^*|} |f(z)| \leqslant |z^*|^N$$

gezeigt. Dies liefert uns einen Widerspruch zu unserer Annahme und folglich gilt

$$|f(z)| \leqslant |z|^N \quad \forall\, |z| \geqslant R$$

Nach der obigen Verallgemeinerung des Satzes von Liouville ist die auf ganz $\mathbb{C}$ homomorphe (d.h. ganze) Funktion f ein Polynom vom Grad $\leqslant N$. Daraus erhalten wir einen weiteren Widerspruch zu der Voraussetzung, da wir zuvor gefordert haben, dass f kein Polynom ist. Folglich ist unsere Annahme (bzgl. der Existenz einer solchen Konstanten C) falsch und demzufolge gilt

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(f,r)}{\ln r} = \infty$$