Ergänzendes Material zur Vorlesung:

Definition 1: (Kette). $\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{C}$ Integrationswege wobei $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ mit $a_i < b_i$ für $i = 1, \ldots, k$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann bezeichnet man eine formale Linearkombination $\Gamma = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \gamma_i$ der Wege γ_i als Kette. Hierbei gibt n_i an, wie oft der Integrationsweg γ_i durchlaufen wird.

Definition 2: (Zyklus). Eine Kette $\Gamma = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \gamma_i$ heißt geschlossene Kette (bzw. Zyklus oder Zykel), falls γ_i für jedes $i = 1, \ldots, k$ ein geschlossener Integrationsweg ist.

Definition 3: (Spur eines Zyklus). Sei $\Gamma = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \gamma_i$ ein Zyklus mit $n_i \neq 0 \ \forall\, i = 1, \ldots, k$. Dann ist die Spur von Γ definiert durch

$$\mathrm{Sp}(\Gamma) := \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{Sp}(\gamma_i)$$

Definition 4: (Integral längs eines Zyklus). Sei $\Gamma = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \gamma_i$ ein Zyklus und $f : \mathrm{Sp}(\Gamma) \to \mathbb{C}$ stetig. Dann definieren wir das Integral längs Γ über f durch

$$\int_\Gamma f(z)dz := \sum_{i=1}^{k} n_i \int_{\gamma_i} f(z)dz$$

Definition 5: (Zyklus in einer Menge). Sei $U \subset \mathbb{C}$ und $\Gamma = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \gamma_i$ ein Zyklus. Γ heißt Zyklus in U, falls $\mathrm{Sp}(\Gamma) \subset U$.

Definition 6: (Windungszahl). Sei $\Gamma = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \gamma_i$ ein Zyklus und $z \in \mathbb{C} \backslash \mathrm{Sp}(\Gamma)$. Dann ist die Windungszahl (bzw. Umlaufzahl oder Index) von Γ um z definiert durch

$$\mathrm{ind}_\Gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \in \mathbb{Z}$$

Definition 7: (Inneres und Äusseres eines Zyklus). Sei $\Gamma = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \gamma_i$ ein Zyklus. Dann definieren wir das Innere von Γ durch

$$\mathrm{int}(\Gamma) := \{z \in \mathbb{C} \backslash \mathrm{Sp}(\Gamma) \mid \mathrm{ind}_\Gamma(z) \neq 0\}$$

und das Äussere von Γ durch

$$\mathrm{ext}(\Gamma) := \{z \in \mathbb{C} \backslash \mathrm{Sp}(\Gamma) \mid \mathrm{ind}_\Gamma(z) = 0\}$$

Definition 8: (Nullhomogener Zyklus). Sei $U \subset \mathbb{C}$ und $\Gamma = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot \gamma_i$ ein Zyklus in U. Dann heißt Γ nullhomolog in U, falls $\mathrm{int}(\Gamma) \subset U$.

Satz 9: (Cauchyscher Integralssatz). $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, Γ nullhomologer Zyklus in U. Dann gilt:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

Satz 10: (Cauchysche Integralformel). $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, Γ nullhomologer Zyklus in U. Dann gilt:

$$\mathrm{ind}_\Gamma(z) \cdot f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = 0 \quad \forall\, z \in U \backslash \mathrm{Sp}(\Gamma)\ \forall\, k \in \mathbb{N}_0$$

Satz 11: (Residuensatz). $U \subset \mathbb{C}$ offen, Γ nullhomologer Zyklus in U, $A \subset U$ diskret in U, $\mathrm{Sp}(\Gamma) \cap A = \emptyset$, $f : U \backslash A \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

(1): $M := A \cap \mathrm{int}(\Gamma)$ besteht aus endlich vielen Punkten

(2): $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{c \in M} \mathrm{ind}_\Gamma(c) \cdot \mathrm{Res}_c(f)$

Aufgabe 40

Sei $a \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie für einen glatten geschlossenen Pfad, der a nicht enthält, mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel

$$\oint_\Gamma \frac{ze^z}{(z-a)^3}\,dz$$

Lösung:

Erinnerung:

Cauchyscher Integralsatz (für Zyklen): $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, Γ nullhomologer Zyklus in U. Dann gilt:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

Cauchysche Integralformel (für Zyklen): $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, Γ nullhomologer Zyklus in U. Dann gilt:

$$\operatorname{ind}_\Gamma(z) \cdot f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}d\zeta = 0 \quad \forall\, z \in U\backslash \operatorname{Sp}(\Gamma)\ \forall\, k \in \mathbb{N}_0$$

Residuensatz (für Zyklen): $U \subset \mathbb{C}$ offen, Γ nullhomologer Zyklus in U, $A \subset U$ diskret in U, $\operatorname{Sp}(\Gamma) \cap A = \emptyset$, $f : U\backslash A \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

(1): $M := A \cap \operatorname{int}(\Gamma)$ besteht aus endlich vielen Punkten

(2): $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{c\in M} \operatorname{ind}_\Gamma(c)\cdot \operatorname{Res}_c(f)$

• 1. Möglichkeit: (Cauchyscher Integralsatz und Cauchysche Integralformel für Zyklen).

1. Fall: ($a \notin \operatorname{int}(\Gamma)$). Wir überprüfen die Voraussetzungen des Cauchyschen Integralsatzes für Zyklen: Dazu betrachten wir die offene Menge $U := \mathbb{C}\backslash\{a\}$. Offenbar ist $f : \mathbb{C}\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \frac{ze^z}{(z-a)^3}$ holomorph. Weiter ist Γ nach Voraussetzung ein geschlossener und stetig differenzierbarer Integrationsweg, also insbesondere ein Zyklus. Wegen der Eigenschaft $\operatorname{Sp}(\Gamma) \subset \mathbb{C}\backslash\{a\}$ (denn $a \notin \operatorname{Sp}(\Gamma)$ (nach Aufgabenvoraussetzung) und $a \notin \operatorname{int}(\Gamma)$ (nach Fallvoraussetzung)) ist Γ ein Zyklus in $\mathbb{C}\backslash\{a\}$. Zudem ist Γ nullhomolog in $\mathbb{C}\backslash\{a\}$, denn es gilt $\operatorname{int}(\Gamma) \subset \mathbb{C}\backslash\{a\}$ (da $\operatorname{int}(\Gamma) \subset \mathbb{C}$ und $a \notin \operatorname{int}(\Gamma)$). Damit sind die Voraussetzungen des Cauchyschen Integralsatzes (CIS) für Zyklen erfüllt und es folgt

$$\int_\Gamma f(z)dz \overset{\text{(CIS)}}{=} 0$$

2. Fall: ($a \in \operatorname{int}(\Gamma)$). Wir überprüfen die Voraussetzungen der Cauchyschen Integralformel für Zyklen: Dazu betrachte die offene Menge $U := \mathbb{C}$. Offenbar ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = ze^z$ holomorph. Weiter ist Γ nach Voraussetzung ein geschlossener und stetig differenzierbarer Integrationsweg, also insbesondere ein Zyklus. Wegen der Eigenschaften $\operatorname{Sp}(\Gamma) \subset \mathbb{C}$ und $\operatorname{int}(\Gamma) \subset \mathbb{C}$ ist Γ ein nullhomologer Zyklus in $\mathbb{C}$. Damit sind die Voraussetzungen der Cauchyschen Integralformel (CIF) für Zyklen erfüllt und es folgt

$$\int_\Gamma \frac{ze^z}{(z-a)^3}dz \overset{\text{(CIF)}}{=} \frac{2\pi i}{2!}\cdot \operatorname{ind}_\Gamma(a)\cdot f^{(2)}(a) = \pi i e^a(2+a)\mathbb{Z}$$

In der letzten Gleichung gingen zweierlei Dinge ein: Zum einen gilt (wegen $a \notin \operatorname{Sp}(\Gamma)$ ist die Umlaufzahl (bzw. der Index) $\operatorname{ind}_\Gamma(a)$ wohldefiniert)

$$\operatorname{ind}_\Gamma(a) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\zeta - a}d\zeta \ \in \mathbb{Z}$$

also $\operatorname{ind}_\Gamma(a) \in \mathbb{Z}$. Zum anderen sind die Ableitungen von f für $z \in \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f(z) &= ze^z \\ f'(z) &= (1+z)e^z \\ f''(z) &= (2+z)e^z \end{aligned}$$

• 2. Möglichkeit: (Residuensatz).
Wir betrachten die offene Menge $U := \mathbb{C}$ offen. Zunächst einmal ist Γ nach Voraussetzung ein geschlossener und stetig differenzierbarer Integrationsweg, also insbesondere ein Zyklus. Wegen der Eigenschaften $\mathrm{Sp}(\Gamma) \subset \mathbb{C}$ und $\mathrm{int}(\Gamma) \subset \mathbb{C}$ ist Γ ein nullhomologer Zyklus in $\mathbb{C}$. Desweiteren liegt die Menge $A := \{a\}$ diskret in $\mathbb{C}$ (denn wir finden immer eine offene Umgebung in $\mathbb{C}$, die außer den Punkt a keinen weiteren Punkt der Menge A enthält) und es gilt $\mathrm{Sp}(\Gamma) \cap \{a\} = \emptyset$ (denn $a \notin \mathrm{Sp}(\Gamma)$ (nach Aufgabenstellung)). Offenbar ist $f : \mathbb{C}\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \frac{ze^z}{(z-a)^3}$ holomorph. Damit sind die Voraussetzungen des Residuensatzes (RS) für Zyklen erfüllt und es folgt zunächst aus (1)

$$M := \{a\} \cap \mathrm{int}(\Gamma) \text{ besteht aus endlich vielen Punkten}$$

(denn $M = \{a\}$, falls $a \in \mathrm{int}(\Gamma)$, und $M = \emptyset$, falls $a \notin \mathrm{int}(\Gamma)$) und aus (2) folgt abschließend

$$\int_\Gamma \frac{ze^z}{(z-a)^3} dz \overset{(\mathrm{RS})}{=} 2\pi i \sum_{c \in M} \mathrm{ind}_\Gamma(c) \cdot \mathrm{Res}_c\left(\frac{ze^z}{(z-a)^3}\right) = 2\pi i \underbrace{\mathrm{ind}_\Gamma(a)}_{\in\mathbb{Z}} \cdot \underbrace{\mathrm{Res}_a\left(\frac{ze^z}{(z-a)^3}\right)}_{\frac{1}{2}e^a(2+a)}$$
$$= \pi i e^a (2+a)\mathbb{Z}$$

Dabei lässt sich das Residuum wie folgt mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel für Kreislinien berechnen

$$\mathrm{Res}_a\left(\frac{ze^z}{(z-a)^3}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho} \frac{ze^z}{(z-a)^3} dz \overset{(\mathrm{CIF})}{=} \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{2\pi i}{2!} \cdot f^{(2)}(a) = \frac{1}{2}e^a(2+a)$$

Abschlussbemerkung: Es ist hierbei auch möglich die Fälle $a \notin \mathrm{int}(\Gamma)$ und $a \in \mathrm{int}(\Gamma)$ zu unterscheiden. Im Falle $a \notin \mathrm{int}(\Gamma)$ erhalten wir $M = \emptyset$ und folglich enthält die Aussage (2) des Residuensatzes die leere Summe, weswegen das Integral 0 ist. Im Falle $a \in \mathrm{int}(\Gamma)$ müssen wir unseren obigen Berechnungen Folge leisten.

Aufgabe 41

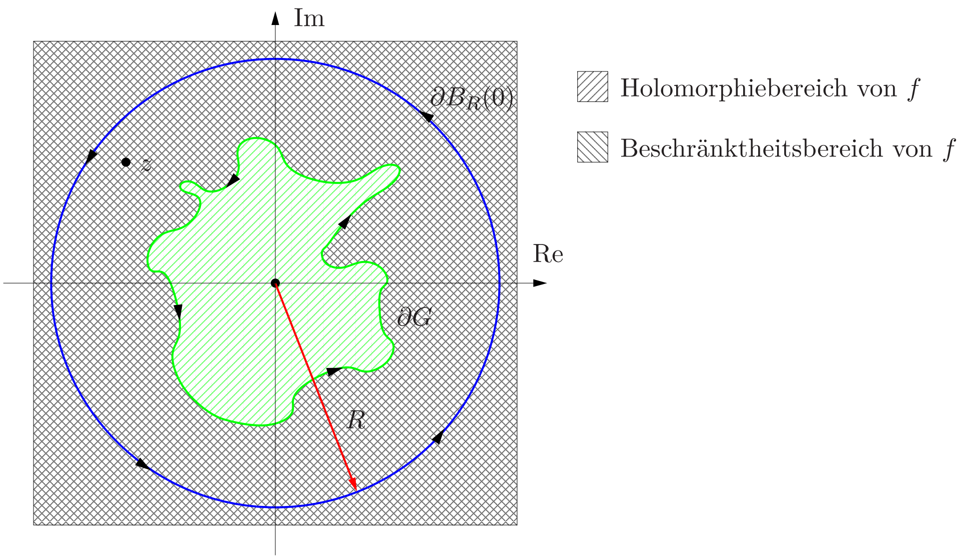
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ∂G und $0 \in G$. Sei $f : \mathbb{C}^\bullet = \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ eine auf $\mathbb{C}^\bullet = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorphe und auf $\mathbb{C}\backslash G$ beschränkte Funktion. Beweisen Sie

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial G} \frac{zf(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)} d\zeta \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash G$$

Beachte: $f(z) = 0 \; \forall z \in G$. Hinweis: Benutzen Sie Gebiete $D_R(0)\backslash G$ für große R.

Lösung:

Wähle $R > 0$ beliebig aber (zunächst) fest und zwar so groß, dass $\overline{G} \subset \mathrm{int}(B_R(0))$. Ein solches R existiert, da $G \subset \mathbb{C}$ beschränkt ist.



Definiere $\Gamma := \partial B_R(0) + \partial G$. Dann ist Γ ein Zyklus (denn $\partial B_R(0)$ und ∂G sind glatte geschlossene Integrationswege). Da f holomorph in $\mathbb{C}^\bullet = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist, können wir die Cauchysche Integralformel für Zyklen anwenden, d.h. $\forall\, z \in B_R(0)\backslash G$:

$$\frac{1}{z}f(z) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta-z)}d\zeta \overset{(2)}{=} \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta-z)}d\zeta + \int_{\partial B_R(0)}\frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta-z)}d\zeta\right]$$

(1): Cauchysche Integralformel für Zyklen (da f in $\mathbb{C}^\bullet = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorph). (2): Definition von Γ und Definition des Kurvenintegrals für Zyklen. Hierbei beachte, dass - wegen $0 \in G$ - die linke Seite der Gleichungskette wohldefiniert ist. Desweiteren bezeichnet $\partial B_R(0)$ die positiv orientierte (d.h. gegen den Uhrzeigersinn verlaufende) Kreislinie, d.h. $\partial B_R(0) : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $t \mapsto Re^{it}$. Beachte, dass $\partial B_R(0)$ entgegengesetzt des Uhrzeigersinns und ∂G im Uhrzeigersinn durchlaufen wird, d.h. die Kurven verlaufen in unterschiedlichen Richtungen.
Es bleibt zu zeigen, dass das Integral über den Rand $\partial B_R(0)$ für große $R > 0$ mit $\overline{G} \subset \operatorname{int}(B_R(0))$ verschwindet. Dazu werden wir gleich den Grenzübergang für $R \to \infty$ untersuchen. Zunächst beginnen wir aber mit einer Abschätzung

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial B_R(0)}\frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta-z)}d\zeta\right| &\overset{(3)}{=} \left|\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{it})}{Re^{it}(Re^{it}-z)}\cdot Rie^{it}dt\right| \overset{(4)}{\leqslant} \int_0^{2\pi}\frac{|f(Re^{it})|}{|Re^{it}|\cdot|Re^{it}-z|}\cdot\left|Rie^{it}\right|dt\\ &\overset{(5)}{\leqslant} M\int_0^{2\pi}\frac{1}{|Re^{it}-z|}dt \overset{(6)}{\leqslant} M\int_0^{2\pi}\frac{1}{||Re^{it}|-|z||}dt \overset{(7)}{=} M\int_0^{2\pi}\frac{1}{|R-|z||}dt\\ &\overset{(8)}{=} \frac{2\pi M}{R-|z|} \quad \forall\, z \in B_R(0)\backslash G\end{aligned}$$

(3): Definition der Kurve $\partial B_R(0)$ und Definition des Kurvenintegrals. (4): Für $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig gilt $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt$. (5): $|Re^{it}| = |R| \cdot |e^{it}| = R\ \forall\, t \in [0, 2\pi]$ da $R > 0$. Und $|f(Re^{it})| \leqslant M$ da $|f(z)| \leqslant M\ \forall\, z \in \mathbb{C}\backslash G$ (denn f ist beschränkt auf $\mathbb{C}\backslash G$). (6): Umgekehrte Dreiecksungleichung $|x - y| \geqslant ||x| - |y|| > 0$ also $\frac{1}{|x-y|} \leqslant \frac{1}{||x|-|y||}$, wobei $||Re^{it}| - |z|| > 0$ da $z \in B_R(0)$, d.h. $|z| < R$. (7): $|Re^{it}| = |R| \cdot |e^{it}| = R\ \forall\, t \in [0, 2\pi]$ da $R > 0$. (8): Integrand ist unabhängig von t.
Kommen wir jetzt zum Grenzübergang $R \to \infty$. Da $R > 0$ mit der Eigenschaft $\overline{G} \subset \operatorname{int}(B_R(0))$ beliebig gewählt wurde, folgt

$$\begin{aligned}&\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\partial B_R(0)}\frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta-z)}d\zeta\right| = \lim_{R\to\infty}\frac{2\pi M}{R-|z|} = 0 \quad \forall\, z \in B_R(0)\backslash G\\ \Longrightarrow\ &\lim_{R\to\infty}\int_{\partial B_R(0)}\frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta-z)}d\zeta = 0\end{aligned}$$

(In der letzten Folgerung wurde $|z_n| \overset{n\to\infty}{\to} 0 \Longrightarrow z_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ verwendet.) Aus dieser Tatsache folgt nun $\forall\, z \in \mathbb{C}\backslash G$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{z}f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta-z)}d\zeta \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\backslash G\\ \Longrightarrow\ & f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{zf(\zeta)}{\zeta(\zeta-z)}d\zeta \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\backslash G\end{aligned}$$

Aufgabe 42

Sei $R > 0$, $a, b \in B_R(0)$ und f eine holomorphe Funktion in einer Umgebung von $B_R(0)$. Berechne

$$\oint_{\partial D_R(0)}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz$$

Beweisen Sie mit Hilfe dieses Integrals den Satz von Liouville, d.h. zeigen Sie, dass jede beschränkte ganze Funktion konstant ist.

Lösung:

Erinnerung:

Cauchyscher Integralformel (für Kreisscheiben): $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $c \in U$, $B := B_r(c) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r\}$ offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt c und Radius $r > 0$, $\overline{B} \subset U$, $\zeta \in B$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{\partial B} \frac{f(z)}{z - \zeta}\, dz \qquad \textit{(Cauchysche Integralformel)}$$

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \oint_{\partial B} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{n+1}}\, dz \qquad \textit{(Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel)}$$

wobei ∂B die positiv orientierte Kurve über den Rand von B ist, d.h.

$$\partial B = \partial B_r(c) : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \text{ mit } t \mapsto c + re^{it}$$

Standardabschätzung: $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ glatte Kurve, $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und $\mathrm{spur}(\alpha) = \alpha([a, b]) \subset D$. Dann gilt:

$$\left| \int_\alpha f(\zeta)\, d\zeta \right| \leqslant C \cdot L(\alpha) \qquad \textit{(Standardabschätzung)}$$

wobei $|f(\zeta)| \leqslant C$ für alle $\zeta \in \mathrm{spur}(\alpha)$ und $L(\alpha)$ die Bogenlänge von α ist

$$L(\alpha) := \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt$$

Satz von Liouville: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze (d.h. f ist holomorph auf ganz $\mathbb{C}$) und beschränkte (d.h. $\exists\, C \in \mathbb{R}$: $|f(z)| \leqslant C \;\forall\, z \in \mathbb{C}$), dann ist f konstant (d.h. $f'(z) = 0 \;\forall\, z \in \mathbb{C}$).

Teil 1: (Berechnung des Integrals)

1. Fall: $(a \neq b)$

Partialbruchzerlegung (PBZ):

$$\frac{1}{(z - a)(z - b)} = \frac{A}{(z - a)} + \frac{B}{(z - b)} = \frac{(A + B)z - Ab - Ba}{(z - a)(z - b)}$$

Damit erhalten wir die Gleichungen

$$\text{(I)}: A + B = 0$$
$$\text{(II)}: -Ab - Ba = 0$$

Lösen wir dieses Gleichungssystem auf, so erhalten wir $A = \frac{1}{a-b}$, $B = -\frac{1}{a-b}$ und damit die Darstellung

$$\frac{1}{(z - a)(z - b)} = \frac{\frac{1}{a-b}}{(z - a)} + \frac{-\frac{1}{a-b}}{(z - b)}$$

Es ist mit Hilfe der Partialbruchzerlegung (PBZ):

$$\begin{aligned}\oint_{\partial B_R(0)} \frac{f(z)}{(z - a)(z - b)}\, dz &\overset{\text{(PBZ)}}{=} \oint_{\partial B_R(0)} \frac{\frac{f(z)}{a-b}}{(z - a)}\, dz - \oint_{\partial B_R(0)} \frac{\frac{f(z)}{a-b}}{(z - b)}\, dz \\ &= \frac{1}{a - b} \oint_{\partial B_R(0)} \frac{f(z)}{(z - a)}\, dz - \frac{1}{a - b} \oint_{\partial B_R(0)} \frac{f(z)}{(z - b)}\, dz\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt, dass f in einer Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ von $B_R(0)$ holomorph ist. Diese Tatsache ermöglicht uns die Anwendung der Cauchyschen Integralformel.

Für das erste Integral sind mit „$U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $c := 0 \in U$, $B := B_R(0)$ mit $R > 0$, $\overline{B} \subset U$ (nach Voraussetzung), $\zeta := a \in B$ (nach Voraussetzung)“ die Voraussetzungen der Cauchyschen Integralformel erfüllt und es folgt:

$$\oint_{\partial B_R(0)} \frac{f(z)}{(z - a)}\, dz \overset{\text{(CIF)}}{=} 2\pi i \cdot f(a)$$

Für das zweite Integral sind mit „$U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $c := 0 \in U$, $B := B_R(0)$ mit $R > 0$, $\overline{B} \subset U$ (nach Voraussetzung), $\zeta := b \in B$ (nach Voraussetzung)“ die Voraussetzungen der Cauchyschen Integralformel erfüllt und es folgt:

$$\oint_{\partial B_R(0)} \frac{f(z)}{(z-b)}\,dz \overset{\text{(CIF)}}{=} 2\pi i \cdot f(b)$$

Insgesamt erhalten wir daher:

$$\oint_{\partial B_R(0)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz = \frac{1}{a-b} \cdot 2\pi i \cdot f(a) - \frac{1}{a-b} \cdot 2\pi i \cdot f(b) = 2\pi i \cdot \underbrace{\frac{f(a)-f(b)}{a-b}}_{\text{Differenzenquotient}}$$

2. Fall: $(a = b)$
In diesem Fall sind mit „$U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $c := 0 \in U$, $B := B_R(0)$ mit $R > 0$, $\overline{B} \subset U$ (nach Voraussetzung), $\zeta := a = b \in B$ (nach Voraussetzung)“ die Voraussetzungen der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel für $n = 1$ erfüllt und es folgt:

$$\oint_{\partial B_R(0)} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz \overset{\text{(CIF)}}{=} 2\pi i \cdot \frac{1}{1!} \cdot f^{(1)}(a) = 2\pi i \cdot f'(a)$$

Teil 2: (Beweis des Satzes von Liouville)
Aus der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel (CIF) und der Standardabschätzung (SA) erhalten wir:

$$|f'(a)| \overset{\text{(CIF)}}{=} \left| \frac{1!}{2\pi i} \oint_{\partial B_R(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz \right| = \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \oint_{\partial B_R(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz \right| \overset{\text{(SA)}}{\leqslant} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{C}{R^2} \cdot \underbrace{L(\partial B_R(a))}_{\text{Bogenlänge}}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{C}{R^2} \cdot 2\pi R = \frac{C}{R} \overset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Somit ist $f'(z) = 0 \;\forall\, z \in \mathbb{C}$. Da nun $\mathbb{C}$ ein Gebiet ist, folgt aus dem Satz über konstante Funktionen, dass f konstant ist.

Aufgabe 43

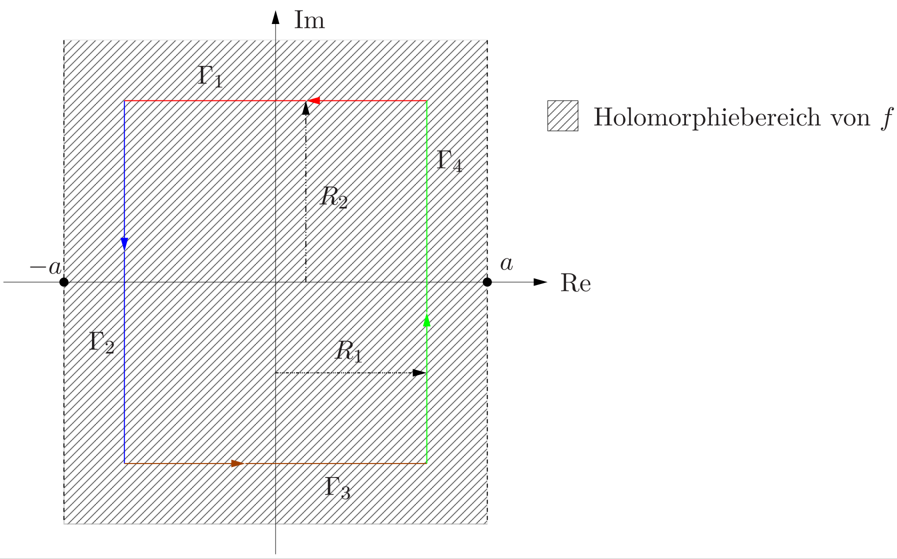
Man nehme an, dass f eine analytische Funktion auf $S := \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| < a\}$ sei für ein $a > 0$. Man nehme weiterhin an, dass zwei Konstanten $c, C > 0$ existieren, so dass

(a): $|f(z)| \leqslant e^{c|z|}$

(b): $\limsup\limits_{z \to a+iy_0} |f(z)| \leqslant C \;\forall\, y_0 \in \mathbb{R}$ und $\limsup\limits_{z \to -a+iy_0} |f(z)| \leqslant C \;\forall\, y_0 \in \mathbb{R}$

Zeigen Sie, dass $|f(z)| \leqslant C \;\forall\, z \in S$ gilt. Hinweis: Benutzen Sie $f(z)e^{\varepsilon z^2}$ mit $\varepsilon > 0$.

Lösung:



Seien $R_1, R_2 > 0$ beliebig aber (zunächst) fest mit $R_1 < a$. Es bezeichne $\Gamma := \Gamma_{R_1,R_2} := \sum_{i=1}^{4} \Gamma_i$ den in der Abbildung dargestellten geschlossenen Integrationsweg entlang des Randes eines von R_1 und R_2 abhängigen Rechtecks. Desweiteren sei $S_{R_1,R_2} := \mathrm{Sp}(\Gamma) \cup \mathrm{Int}(\Gamma)$ die durch die Kurve erzeugte abgeschlossene Rechtecksfläche. Dann gilt mit Hilfe des Maximumsprinzips (MP) und wegen $\partial S_{R_1,R_2} = \mathrm{Sp}(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^{4} \mathrm{Sp}(\Gamma_i)$:

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leqslant \max_{\zeta \in S_{R_1,R_2}} |f(\zeta)| \overset{\text{(MP)}}{=} \max_{\zeta \in \partial S_{R_1,R_2}} |f(\zeta)| \\ &= \max\left\{ \max_{\zeta \in \mathrm{Sp}(\Gamma_1)} |f(\zeta)| + \max_{\zeta \in \mathrm{Sp}(\Gamma_2)} |f(\zeta)| + \max_{\zeta \in \mathrm{Sp}(\Gamma_3)} |f(\zeta)| + \max_{\zeta \in \mathrm{Sp}(\Gamma_4)} |f(\zeta)| \right\} \quad \forall\, z \in S_{R_1,R_2} \end{aligned}$$

Wir müssen nun zeigen, dass jedes dieser vier Maxima zunächst beschränkt ist. Anschließend müssen wir zeigen, dass jedes dieser vier beschränkten Maxima auch beim Grenzübergang $R_1 \to a$ und $R_2 \to \infty$ beschränkt bleibt.

• Γ_1 und Γ_3: In diesem Schritt untersuchen wir das erste der vier Maxima. (Beachte: Das dritte Maxima lässt analog zum ersten behandeln, indem wir im folgenden Teil R_2 durch $-R_2$ sowie Γ_1 durch Γ_3 ersetzen.) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Betrachte die Funktion $f_\varepsilon(z) := f(z) \cdot e^{\varepsilon z^2}$ für $z \in \mathrm{Sp}(\Gamma_1)$ (nach Hinweis der Aufgabe). Es gilt:

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(z)| &\overset{(1)}{=} |f(z)| \cdot \left|e^{\varepsilon z^2}\right| \overset{(2)}{=} |f(z)| \cdot e^{\mathrm{Re}\left(\varepsilon z^2\right)} \overset{(3)}{\leqslant} e^{c\sqrt{x^2+y^2}} \cdot e^{\varepsilon\left(x^2-y^2\right)} \overset{(4)}{=} e^{c\sqrt{x^2+y^2}+\varepsilon\left(x^2-y^2\right)} \\ &\overset{(5)}{<} e^{c\sqrt{a^2+R_2^2}+\varepsilon(a^2-R_2^2)} =: M(a, R_2) \end{aligned}$$

(1): Definition von $f_\varepsilon(z)$ und $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|\ \forall\, z, w \in \mathbb{C}$. (2): $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}\ \forall\, z \in \mathbb{C}$. (3): Abschätzung (a) aus der Aufgabenstellung und $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. (4): $e^z \cdot e^w = e^{z+w}\ \forall\, z, w \in \mathbb{C}$. (5): Wegen $z = x + iy \in \mathrm{Sp}(\Gamma_1)$ gilt $y = R_2$ und $-a < -R_2 \leqslant x \leqslant R_1 < a$, also $x^2 < a$. Auch verwendet wurde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$, so gilt $e^\alpha < e^\beta$ (Exponentialfunktion im Reellen streng monoton wachsend).

Nun untersuchen wir den Grenzübergang für $R_2 \to +\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{R_2 \to \infty} M(a, R_2) &= \lim_{R_2 \to \infty} e^{c\sqrt{a^2+R_2^2}+\varepsilon\left(a^2-R_2^2\right)} = e^{\varepsilon a^2} \cdot \lim_{R_2 \to \infty} e^{cR_2\sqrt{\frac{a^2}{R_2^2}+1}-\varepsilon R_2^2} \\ &= e^{\varepsilon a^2} \cdot \underbrace{\lim_{R_2 \to \infty} e^{-R_2^2\left(-\frac{c}{R_2}\sqrt{\frac{a^2}{R_2^2}+1}+\varepsilon\right)}}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Der Konvergenz nach zufolge gilt daher

$$\forall\, \tilde{\varepsilon} > 0\ \exists\, N = N(\tilde{\varepsilon}) > 0 \text{ mit } N \in \mathbb{R}\ \forall\, R_2 > N: \ |M(a, R_2)| = |M(a, R_2) - 0| \leqslant \tilde{\varepsilon}$$

Nun kehren wir zu unserer ersten Abschätzung zurück und nutzen die gezeigte Konvergenz aus: Sei $\tilde{\varepsilon} > 0$ beliebig, dann existiert ein $N = N(\tilde{\varepsilon}) > 0$ mit $N \in \mathbb{R}$, so dass gilt

$$|f(z)| \cdot e^{\varepsilon\left(x^2-y^2\right)} \overset{(6)}{=} |f_\varepsilon(z)| \overset{(7)}{<} M(a, R_2) \overset{(8)}{\leqslant} \tilde{\varepsilon} \quad \forall\, R_2 > N (\text{d.h. } \forall\, z \in S \text{ mit } \mathrm{Im}(z) = R_2 > N)$$

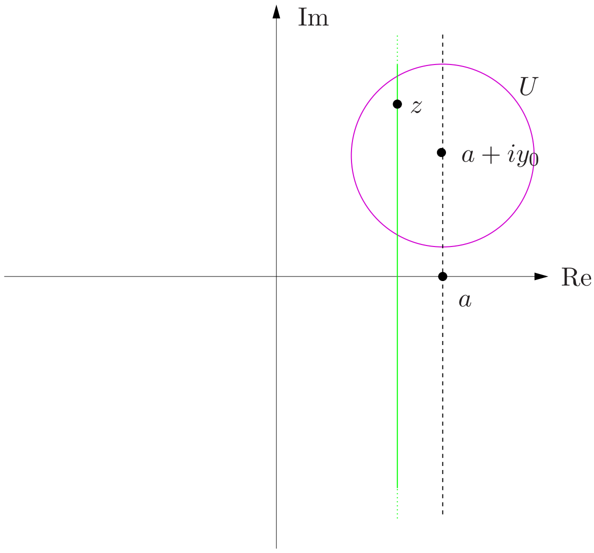
(6): Mit Hilfe von (1),(2) und $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ (siehe oben). (7): Diese Abschätzung haben wir bereits oben gezeigt. (8): Wegen $M(a, R_2) > 0\ \forall\, a, R_2 \in \mathbb{R}$ gilt $M(a, R_2) = |M(a, R_2)|$ und wegen der Konvergenz erhalten wir weiter $M(a, R_2) = |M(a, R_2)| \leqslant \tilde{\varepsilon}$.

Da die zuvor durchgeführte Ungleichung für jedes $\varepsilon > 0$ erfüllt ist und die Schranke insbesondere von ε unabhängig ist, erhalten wir nun durch den Grenzübergang für $\varepsilon \to 0$ die Beschränktheit des ersten Maximums:

$$|f(z)| = \lim_{\varepsilon \to 0} |f(z)| \cdot e^{\varepsilon\left(x^2-y^2\right)} < \lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon} \quad \forall\, z \in S \text{ mit } \mathrm{Im}(z) = R_2 > N$$

Beachte rückblickend, dass der Grenzübergang für $R_1 \to a$ in Schritt (5) eingegangen ist.

• Γ_2 und Γ_4: In diesem Schritt untersuchen wir das zweite und das vierte der vier Maxima.



Wegen der Voraussetzung (b) gilt

$$\exists\, C > 0\; \forall\, y_0 \in \mathbb{R} : \begin{cases} \limsup_{\substack{z \to a+iy_0 \\ z \in S}} |f(z)| \leqslant C \\ \limsup_{\substack{z \to -a+iy_0 \\ z \in S}} |f(z)| \leqslant C \end{cases}$$

Daraus erhalten wir

$$\forall\, y_0 \in \mathbb{R} : \begin{cases} \exists\, U \subset \mathbb{C} \text{ Umgebung von } a + iy_0 : \; f \text{ ist beschränkt in } U \cap S \\ \exists\, V \subset \mathbb{C} \text{ Umgebung von } -a + iy_0 : \; f \text{ ist beschränkt in } V \cap S \end{cases}$$

Beachte hierbei, dass diese Aussagen unabhängig von R_2 (und somit unabhängig von der Länge der Kurven Γ_2 und Γ_4) sind. Daraus folgt nun direkt

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leqslant C_1 = C + \varepsilon_1 \quad \forall\, z \in \mathrm{Sp}(\Gamma_4) \cap (U \cap S) \\ |f(z)| &\leqslant C_2 = C + \varepsilon_2 \quad \forall\, z \in \mathrm{Sp}(\Gamma_2) \cap (V \cap S) \end{aligned}$$

wobei $\varepsilon_1 > 0$ (bzw. $\varepsilon_2 > 0$) eine von der Umgebung U (bzw. von der Umgebung V) abhängige positive Konstante ist. Beachte hierbei, dass je mehr sich R_1 dem a annähert, desto mehr nähern sich ε_1 und ε_2 der 0 an.
Damit haben wir zum einen die Existenz jedes der vier Maxima gezeigt und zum anderen, dass jedes dieser vier Maxima bei den Grenzübergängen $R_1 \to a$ und $R_2 \to \infty$ endlich bleiben